ANALISI MATEMATICA A

- LEZIONE 12 -

LORENZO BRASCO

6 NOVEMBRE 2020

L'ULTIMA VOLTA CI SIAMO LASCIATI SUL LIMITE

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$$

OVVERO OSSERVANDO CHE

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

SI HA CHE

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow e \quad \text{PER} \quad n \to \infty$$

OVVERO

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \longrightarrow \frac{1}{e} \quad \text{PER} \quad n \to \infty}$$

OVVERO

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n/e} \longrightarrow 1 \quad \text{PER} \quad n \to \infty}$$

IN DEFINITIVA ABBIAMO CHE

$$\boxed{\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \quad \text{PER } n \to \infty}$$

(UN ASINTOTICO IMPORTANTE) ☒

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ 1 $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

2 $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$

SOL.

1 $\lim_{n\to\infty} \left(1-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)^{n \to +\infty}$

FORMA INDETERMINATA 1^{∞}

USIAMO UN PO' DI ALGEBRA

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}$$

QUESTO È ESATTAMENTE COME IL LIMITE CHE DEFINISCE e !!

QUINDI

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$$

$$=\frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^n$

OSSERVIAMO CHE POSSIAMO SCRIVERE

$$\left(1+\frac{7}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n/7}\right)^{\frac{n}{7}\cdot 7}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{n/7}\right)^{n/7}\right)^7$$

INTRODUCO IL NUOVO INDICE

$7m = n$

$$= \Big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{\to e}\Big)^7 \xrightarrow[(m\to\infty)]{} (e)^7 = e^7$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = ?$$

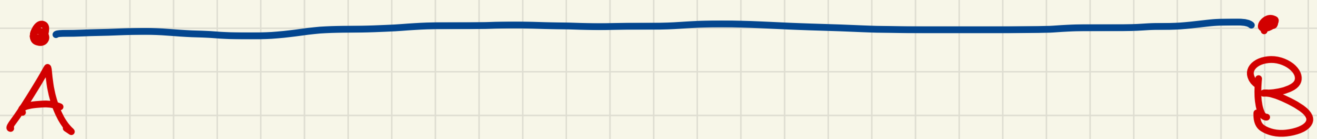
III . 6 SERIE NUMERICHE

LE SERIE NUMERICHE SONO DELLE SOMME DI UN NUMERO INFINITO DI TERMINI.

IN ALTRE PAROLE, SE $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ È UNA SUCCESSIONE, VOGLIO CONSIDERARE IL SIMBOLO FORMALE DI SOMMATORIA INFINITA

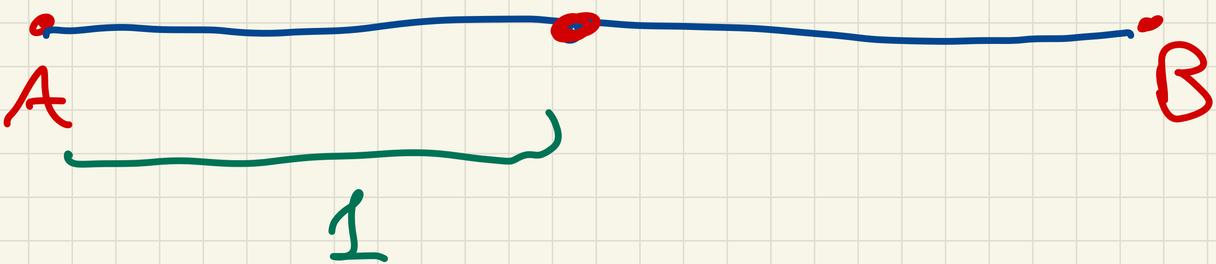
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ SUPPONIAMO CHE IO DEBBA ANDARE DA UN POSTO A AD UN POSTO B. PER SEMPLICITÀ, SUPPONGO CHE A E B DISTANO 2

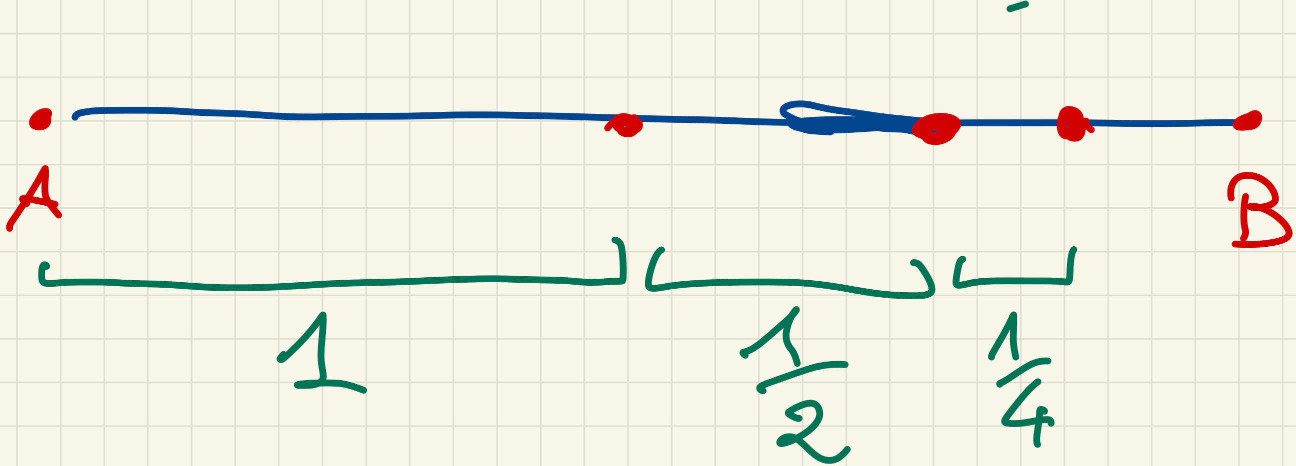


LA DISTANZA 2 PER ME È TROPPA DA FARE TUTTA INSIEME

SUPPONIAMO CHE FACCIA UN PRIMO TRATTO LUNGO 1 E POI MI FERMI PER RIPOSARMI



QUANDO RIPARTO, FACCIO UN ALTRO TRATTO, CHE È LUNGO LA METÀ DEL PRECEDENTE



QUANDO RIPARTO, RIFACCIO ADDIRITTURA MENO STRADA...

PER LA PRECISIONE, FACCIO LA METÀ DELLA TAPPA PRECEDENTE

CONTINUO IN QUESTO MODO, AD OGNI TAPPA, QUANDO RIPARTO, FACCIO METÀ DEL CAMMINO PRECEDENTE.

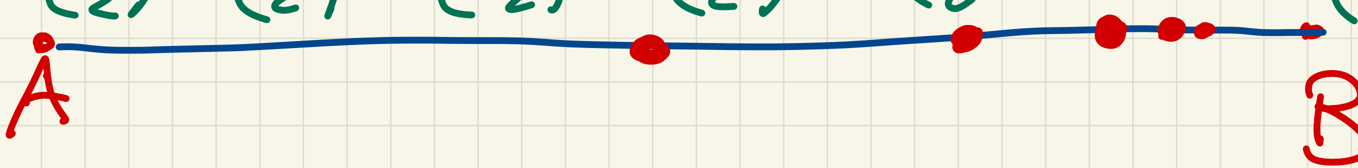
DOMANDA PROCEDENDO IN QUESTO MODO, ARRIVERO' MAI A COPRIRE LA DISTANZA 2? EVENTUALMENTE USANDO UN NUMERO INFINITO DI TAPPE?

PROVIAMO A RISPONDERE:

QUANDO SONO ALLA TAPPA K-ESIMA, IL TRAGITTO CHE HO PERCORSO È

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\overset{\text{K-ESIMA}}{\frac{1}{\;}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^K$$



QUINDI PER RISPONDERE, DEVO SAPER CALCOLARE

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^k=\boxed{\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

SOMMA GEOMETRICA

MEMENTO (DALLA LEZIONE 2)

$$\sum_{n=0}^{k} a^n=\frac{a^{k+1}-1}{a-1}$$

$a\neq 0,\ a\neq 1$

OK! LO SAPPIAMO FARE

QUINDI USANDO LA FORMULA DELLA SOMMA GEOMETRICA

CON $a = \frac{1}{2}$ SI HA

$$\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$$

OVVERO DOPO K TAPPE HO PERCORSO

$$\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left(1-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}_{<0}\right) < 2$$

QUESTO MI DICE CHE IN UN NUMERO FINITO DI TAPPE NON ARRIVO A DESTINAZIONE... MA

SE AMMETTO UN NUMERO <u>INFINITO</u> DI TAPPE, CIOÈ SE $k \to +\infty$

ABBIAMO

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

OK!

ARRIVO A DESTINAZIONE!

- ABBIAMO APPENA FATTO UN ESEMPIO DI SERIE NUMERICA CONVERGENTE

DEFINIZIONE SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

INTRODUCIAMO LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

$\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ DEFINITA DA

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(ES. $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2$ E COSÌ VIA)

DICIAMO CHE LA SERIE DEGLI

a_n, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ È

(I) CONVERGENTE SE LA

SUCCESSIONE $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

È CONVERGENTE. IN TAL

CASO, SI PONE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$$

II DIVERGENTE SE $\{S_K\}_{K\in\mathbb{N}}$ È DIVERGENTE. IN TAL CASO, SI PONE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{K\to\infty} S_K$$

E QUINDI SARÀ $+\infty$ O $-\infty$, A SECONDA CHE $\{S_K\}_{K\in\mathbb{N}}$ DIVERGA A $+\infty$ O A $-\infty$

III IRREGOLARE SE $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

NON NÉ CONVERGENTE

NÉ DIVERGENTE.

ESEMPIO (SERIE GEOMETRICA)

SIA $a>0$ FISSATO, SI TRATTA

DELLA SERIE DEFINITA

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n}$$

QUAL È IL CARATTERE DI QUESTA SERIE? OVVERO È CONVERGENTE, DIVERGENTE O IRREGOLARE?

ANALIZZIAMO LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME PARZIALI $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

DOVE

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a^n = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$$

SOMMA GEOMETRICA $(a \neq 1)$

QUINDI PER DETERMINARE IL CARATTERE DELLA SERIE GEOMETRICA, DEVO DIRE COSA FA

$$S_k = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \qquad \begin{pmatrix} a \neq 1 \\ a > 0 \end{pmatrix}$$

BASTA OSSERVARE CHE

$$\lim_{k \to \infty} a^{k+1} = \begin{cases} +\infty & \text{SE } a > 1 \\ 0 & \text{SE } 0 < a < 1 \end{cases}$$

OVVERO

I) S_k CONVERGE A $\frac{1}{1-a}$

SE $0 < a < 1$

II) S_k DIVERGE A $+\infty$

SE $a > 1$

III) SE $a = 1$, È FACILE PERCHÉ

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} 1^n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k+1 \text{ TERMINI}} = k+1$$

QUINDI ANCHE IN QUESTO CASO $\lim_{k \to \infty} S_k = +\infty$.

RICAPITOLANDO, SE $a > 0$, SI HA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{SE } a \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-a}, & \text{SE } \boxed{0 < a < 1} \end{cases}$$

SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE a

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ (SERIE ARMONICA)

SI TRATTA DELLA SERIE IL CUI TERMINE n-ESIMO È

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \text{OVVERO}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$$

SERIE ARMONICA

QUESTA SERIE È DIVERGENTE!!

COME SI DIMOSTRA?

DEVO FAR VEDERE CHE

$$S_K = \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n}$$ È UNA SUCCESSIONE DIVERGENTE.

ESCLUDIAMO INTANTO CHE SIA IRREGOLARE: BASTA OSSERVARE CHE

$$S_{K+1} = \sum_{n=1}^{K+1} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n} = S_K$$

TERMINI POSITIVI

QUINDI $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ È MONOTONA CRESCENTE, QUINDI PER IL TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTONE ESSA NON È IRREGOLARE.

CI RESTA DA ESCLUDERE CHE $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ SIA CONVERGENTE.

PROCEDO PER ASSURDO:

SUPPONGO QUINDI CHE

$\exists\, L \in \mathbb{R}$ TALE CHE

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} S_k = L}$$

DA QUESTA ASSUNZIONE, NE DERIVA CHE VALE ANCHE

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} S_{2k} = L}$$

USANDO L'ALGEBRA DEI LIMITI, AVREMO QUINDI CHE

$$\lim_{k \to \infty} \left[S_{2k} - S_k \right] = L - L = 0$$

OVVERO $\boxed{S_{2k} - S_k \xrightarrow[(k \to \infty)]{} 0}$

PER TROVARE UNA CONTRADDIZIONE, ANALIZZIAMO PIÙ DA VICINO LA SUCCESSIONE $\boxed{A_k = S_{2k} - S_k}$

RICORDANDO CHE

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

SI HA

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n}$$

DA CUI

$$A_k = S_{2k} - S_k = \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

$$\boxed{= \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n}}$$

ORA, DA UN LATO SAPPIAMO CHE

$$A_k = \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

D'ALTRA PARTE, NON È DIFFICILE VEDERE CHE A_k È CRESCENTE E POSITIVA, IN PARTICOLARE ABBIAMO CHE

$$\boxed{\frac{1}{2} = A_1 \leq A_k \xrightarrow[(k \to \infty)]{} 0}$$

ASSURDO

QUINDI QUESTO DIMOSTRA CHE

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty$$

CIOÈ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty .$$

HO DATO PER BUONO CHE

$$A_k = \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n}$$

FOSSE CRESCENTE,

VERIFICHIAMOLO...

$$A_{k+1} > A_k \iff \boxed{A_{k+1} - A_k > 0}$$

ED OSSERVO CHE

$$A_{k+1} = \sum_{n=k+2}^{2k+2} \frac{1}{n}$$

$$A_k = \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n}$$

DA CUI

$$A_{k+1} - A_k = \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k+1}$$

$$\geq \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{k+1}$$

$$= 0 \, , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

QUINDI EFFETTIVAMENTE

$A_{k+1} \geq A_k$ COME VOLEVO

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ LA SERIE IL CUI TERMINE n-ESIMO È $a_n = (-1)^n$.

IN TAL CASO LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

È IRREGOLARE.

INFATTI, LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI È DATA DA

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n = \cancel{1}+\cancel{(-1)}+\cancel{1}+\cancel{(-1)} + \dots + (-1)^k$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{SE } k \text{ È DISPARI} \\ 1, & \text{SE } k \text{ È PARI} \end{cases}$$

CHE È UNA SUCCESSIONE IRREGOLARE.

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA)

SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, SE LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

È CONVERGENTE,

ALLORA $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 0}$.

OSS. ⚠ NON VALE IL VICEVERSA.

PER ESEMPIO, NELLA SERIE ARMONICA

$$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

MA $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ NON È CONVERGENTE.

<u>DIM.</u> (DEL TEOREMA)

SIA LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

PER IPOTESI, $\exists\, L \in \mathbb{R}$ T.C.

$$\lim_{k \to \infty} S_k = L$$

D'ALTRA PARTE, DA QUESTO SEGUE ANCHE CHE

$$\lim_{k \to \infty} S_{k-1} = L$$

QUINDI $$\lim_{k \to \infty} (S_k - S_{k-1}) = L - L = 0$$

SCRIVENDOLO ESPLICITAMENTE, SI HA

$$0 = \lim_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1})$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n - \cancel{\sum_{n=0}^{k-1} a_n}\right)$$

$$\boxed{= \lim_{k\to\infty} a_k}$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{OSS.}}$ (SERIE A TERMINI POSITIVI)

SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ T.C. $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ALLORA $S_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n \geq \sum_{n=0}^{k} a_n = S_k$

CIOÈ S_k È CRESCENTE, QUINDI

NON È IRREGOLARE.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ NON È MAI IRREGOLARE

SE $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

II.7 CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL CONFRONTO)

SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONI A TERMINI POSITIVI.

SUPPONIAMO CHE $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ T.C.

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0$$

ALLORA SI HA CHE

I) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

II) $$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

<u>DOMANDA</u> SECONDO VOI COSA FA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad ?$$