ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 14 –

LORENZO BRASCO

13 NOVEMBRE 2020

CAPITOLO IV

"LIMITI DI FUNZIONI
DI UNA VARIABILE
REALE"

IV. 1 INTORNI E PUNTI DI ACCUMULAZIONE

IN QUESTO CAPITOLO VOGLIAMO ESTENDERE IL CONCETTO DI LIMITE A FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE OVVERO

PER $$f : A \longrightarrow B$$

CON $$A, B \subseteq \mathbb{R}$$

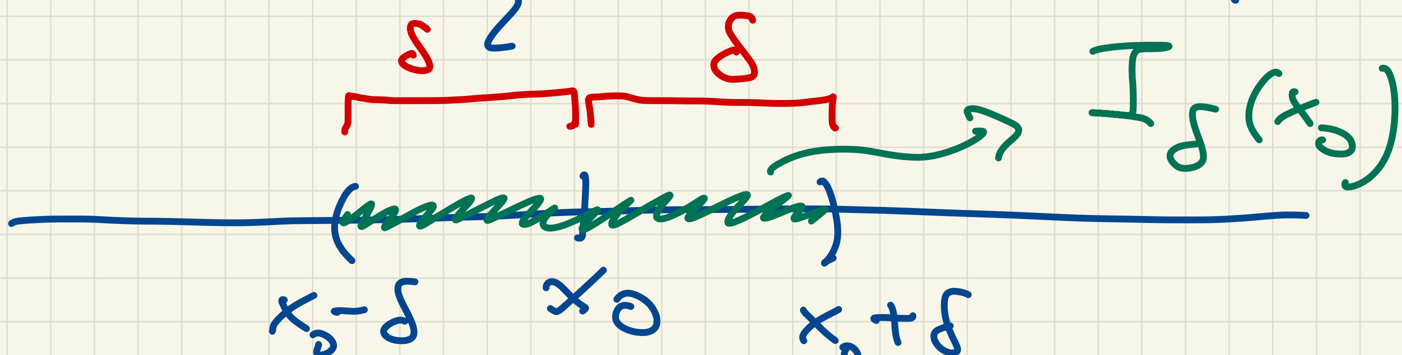
NOTAZIONI

SIA $x_0 \in \mathbb{R}$, SE $\delta > 0$ (DELTA)

SI PONE

$$I_\delta(x_0) \overset{\text{DEF.}}{=} (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \}$$

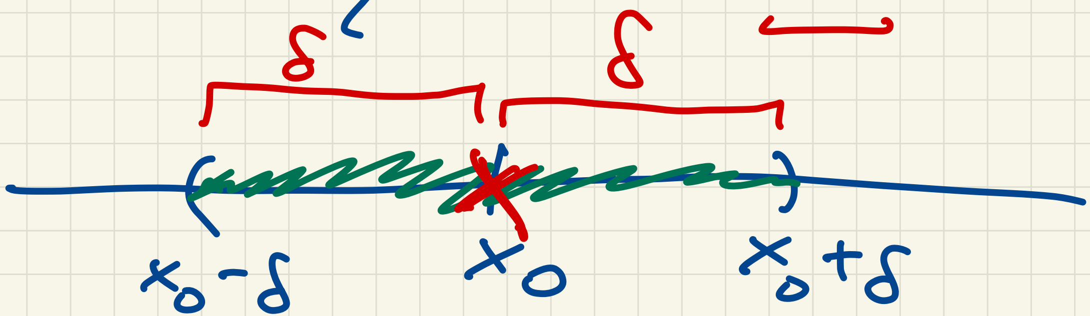


INTORNO DI x_0 DI RAGGIO δ

PONIAMO ANCHE

$$\mathring{I}_\delta(x_0) \overset{\text{DEF.}}{=} I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : 0<|x-x_0|<\delta\}$$



INTORNO BUCATO DI x_0 DI RAGGIO δ

CI SERVE IL CONCETTO DI

PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

QUESTI SARANNO I PUNTI IN CUI HA SENSO ANDARE A CALCOLARE UN LIMITE DI FUNZIONE $x \mapsto f(x)$ CON $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ NON VUOTO. SI DICE CHE $x_0 \in \mathbb{R}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A SE VALE LA PROPRIETÀ SEGUENTE:

$$\mathring{I}_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$$

PER OGNI $\delta > 0$

$\boxed{\text{OSS.}}$ (IMPORTANTE)

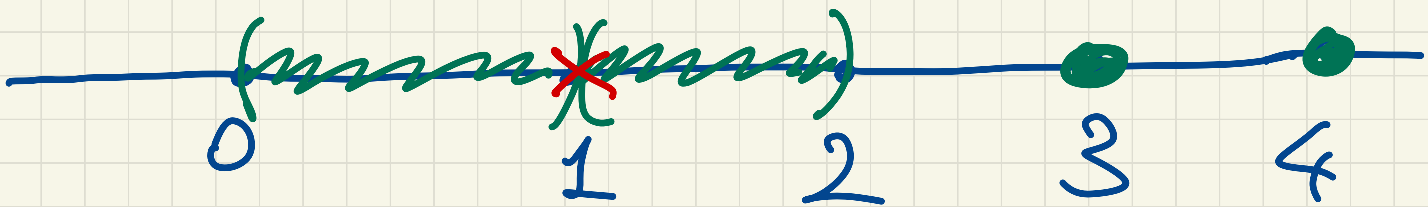
1) SI NOTI CHE UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A POTREBBE NON APPARTENERE AD A

2) POSSONO ESISTERE $x_0 \in A$ CHE NON SONO DI ACCUMULAZIONE PER A STESSO.

NOTAZIONE INDICHEREMO CON $Acc(A)$ L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI A

ESEMPIO SIA

$$A = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3,4\}$$



CHI È $Acc(A)$?

SAPRESTE DARMI UN PUNTO DI A CHE NON È DI ACCUMULAZIONE?

RISPOSTA $3 \in A$ MA **NON È** DI ACCUMULAZIONE PER A.

DIMOSTRIAMOLO:

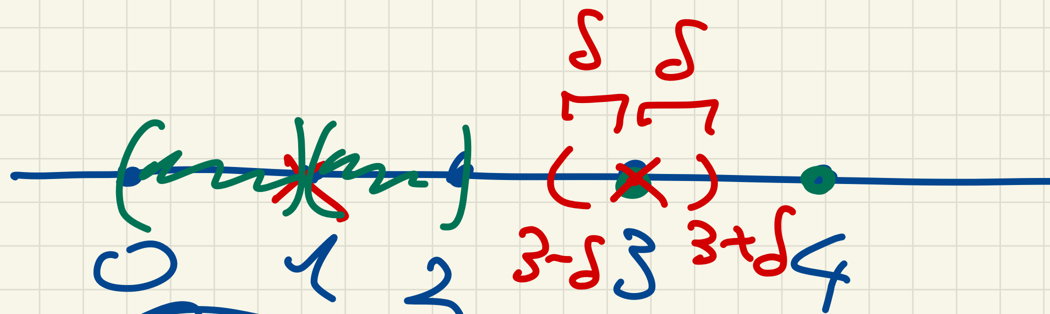
LA NEGAZIONE DI

$$\boxed{\mathring{I}_\delta(3) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall \delta > 0}$$

È

$$\boxed{\exists \delta > 0 \text{ T.C. } \mathring{I}_\delta(3) \cap A = \emptyset}$$

FACCIAMO VEDERE CHE QUEST'ULTIMA AFFERMAZIONE È VERA:



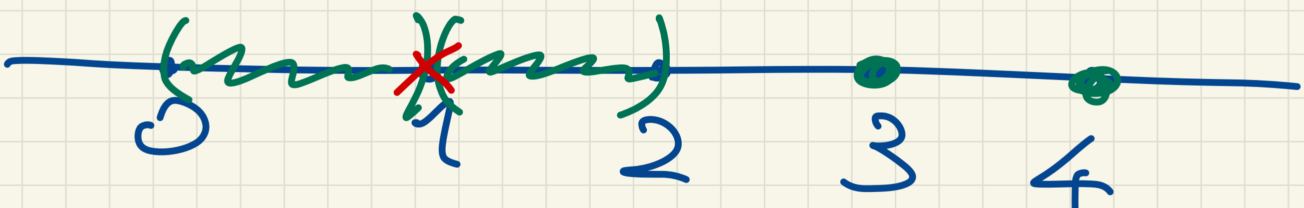
PRENDENDO $\delta = \frac{1}{2}$ SI VEDE CHE

$$\mathring{I}_{\frac{1}{2}}(3) \cap A = \emptyset$$

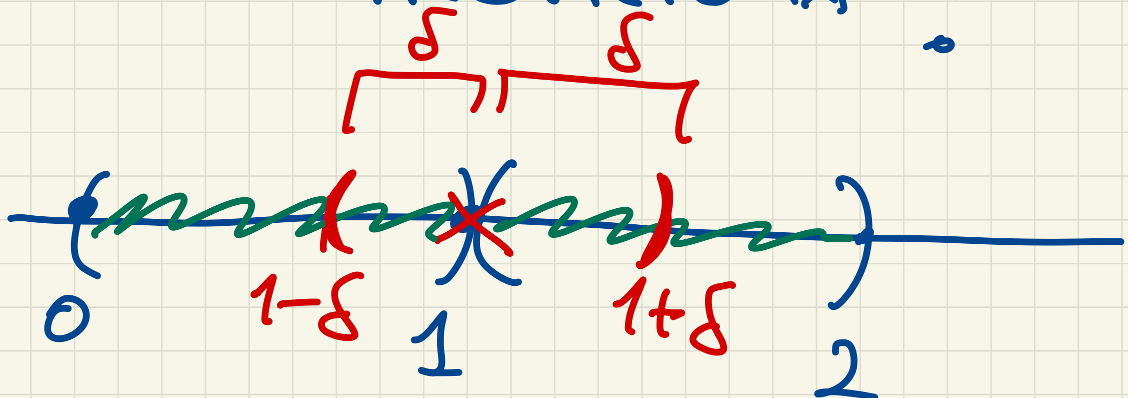
QUINDI EFFETTIVAMENTE

$$3 \notin Acc(A).$$

- SAPRESTE DARMI UN PUNTO CHE NON STA IN A, MA È DI ACCUMULAZIONE PER A?



PER ESEMPIO, 1 HA QUESTA PROPRIETÀ!



$$\mathring{I}_\delta(1) = (1-\delta, 1) \cup (1, 1+\delta)$$

E OVVIAMENTE

$$\mathring{I}_\delta(1) \cap A \neq \emptyset$$

ANCHE 0 E 2 SONO DI ACCUMULAZIONE.

IN DEFINITIVA SI HA

$$A = (0,1) \cup (1,2) \cup \{3,4\}$$

E

$$Acc(A) = [0,2]$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

SIA $A = \left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

DETERMINARE

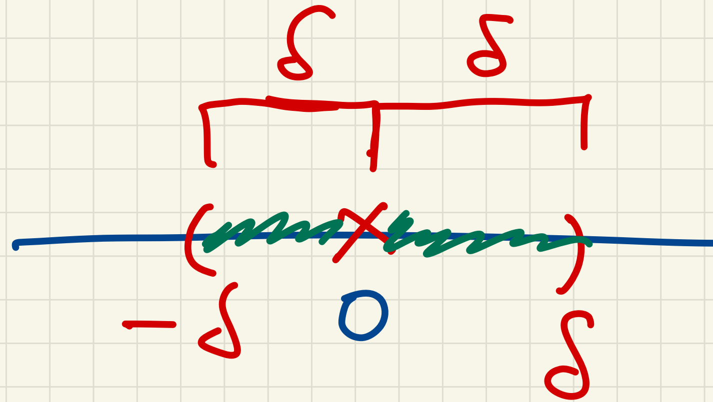
$$Acc(A).$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ NON È DIFFICILE VEDERE CHE SE $A \subseteq \mathbb{R}$ È UN INTERVALLO CON ESTREMI $a < b$, ALLORA

$$\mathrm{Acc}(A) = [a, b].$$

ESEMPIO ("TIPICO")

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



ALLORA $0 \notin A$

MA $0 \in \mathrm{Acc}(A)$

E SI HA $\mathrm{Acc}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$.

IV. 2 LIMITI DI FUNZIONI

DEFINIZIONE SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ NON VUOTO. SIA $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE E SIA x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A. SIA INFINE $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, SI DICE CHE

"$f(x)$ TENDE AD L PER x CHE TENDE AD x_0" SE VALE LA PROPRIETÀ SEGUENTE:

PER OGNI SUCCESSIONE

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{x_0\}$$

TALE CHE $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0$

SI HA $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$

IN TAL CASO, USEREMO

IL SIMBOLO $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L}$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

UNA FUNZIONE E $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

SI DICE CHE "$f(x)$ TENDE AD L

PER x CHE TENDE A $+\infty$"

SE VALE LA PROPRIETÀ SEGUENTE:

PER OGNI SUCCESSIONE

$\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (a, +\infty)$ TALE CHE

$\lim_{n \to \infty} z_n = +\infty$, SI HA $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = L$

IN TAL CASO, SCRIVEREMO

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L .$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ DA UN PUNTO DI VISTA PRATICA, LA DEFINIZIONE DI LIMITE CHE ABBIAMO DATO, CI PERMETTE DI RIDURCI AL CASO DEI LIMITI DI SUCCESSIONI.
IN PARTICOLARE, TUTTI I RISULTATI

VISTI PER I LIMITI DI SUCCESSIONI, CONTINUANO A VALERE PER IL CASO DEI LIMITI DI FUNZIONI.

AD ESEMPIO, CONTINUANO A VALERE L' ALGEBRA DEI LIMITI E LE FORME INDETERMINATE

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ PROVIAMO A CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

QUESTA È LA SITUAZIONE "TIPICA" CHE PIÙ CI INTERESSA:

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$ HA COME DOMINIO

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

D'ALTRA PARTE 0 È DI ACCUMULAZIONE PER ~~R~~ D, HA

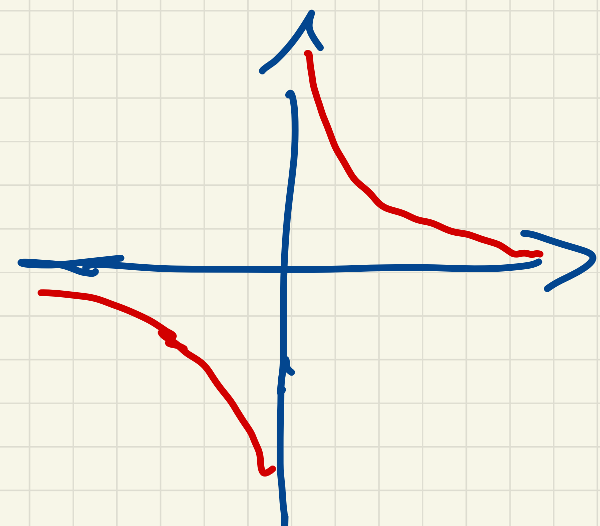
SENSO CHIEDERSI:

"COSA FA $\frac{1}{x}$ QUANDO

x SI AVVICINA A 0 ?"

SECONDO VOI, QUANTO FA

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \; ?$$



NON ESISTE!

INFATTI, ESISTONO 2

SUCCESSIONI

$$x_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \text{e} \quad z_n = -\frac{1}{n} < 0$$

TALI CHE

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0 = \lim_{n \to \infty} z_n$$

MA

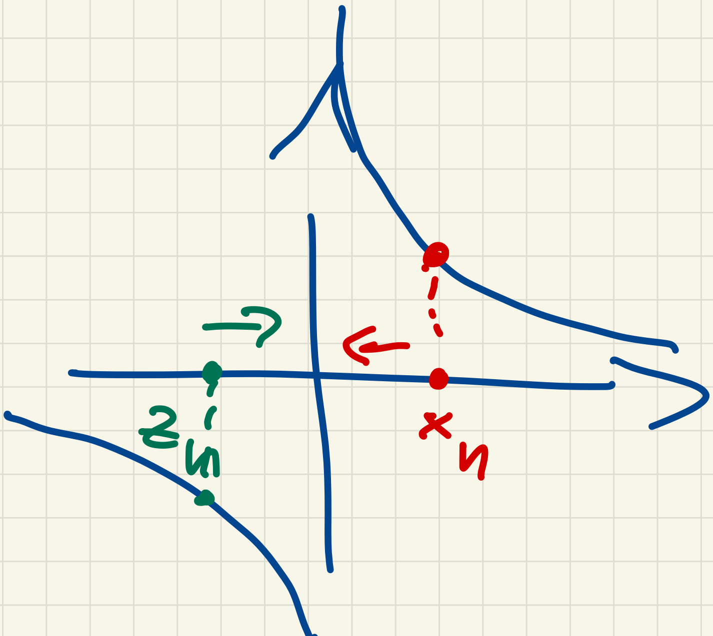
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} n =$$

$= +\infty$

MENTRE

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -n = -\infty$$



$$\boxed{\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}}$$

QUELLO CHE ESISTE INVECE

È IL LIMITE DESTRO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

(OVVERO "x SI AVVICINA A 0" DA DESTRA, QUINDI $x > 0$)

ED IL LIMITE SINISTRO

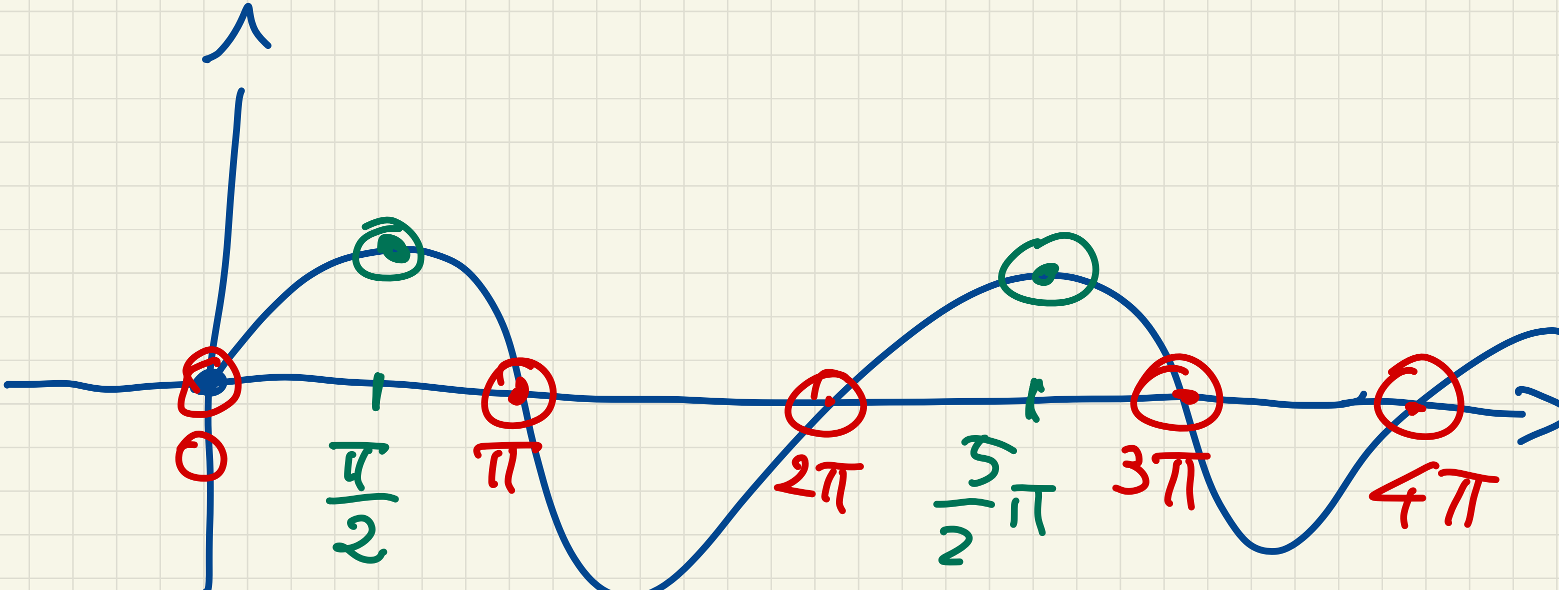
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

(OVVERO "x SI AVVICINA A 0" DA SINISTRA, QUINDI $x<0$)

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(x)$

BASTA TROVARE 2 SUCCESSIONI DIVERGENTI $\{x_n\}$ E $\{z_n\}$ TALI CHE

$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} \sin(z_n)$$



PER ESEMPIO

$$\boxed{x_n = n\pi \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

E

$$\boxed{z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{N}}$$

ENTRAMBE DIVERGONO A $+\infty$

MA

$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0$$

DIVERSI!

MENTRE

$$\lim_{n\to\infty} \sin(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ ABBIAMO VISTO CHE

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

AL CONTRARIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

PERCHÉ $x^2 > 0$ SE $x \neq 0$.

PIÙ IN GENERALE, SE $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \text{NON ESISTE}, & n \text{ DISPARI} \\ +\infty, & n \text{ PARI} \end{cases}$$

PROPOSIZIONE (PERMANENZA DEL SEGNO "SOFT")

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ NON VUOTO. SIA $f : A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE E x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A.

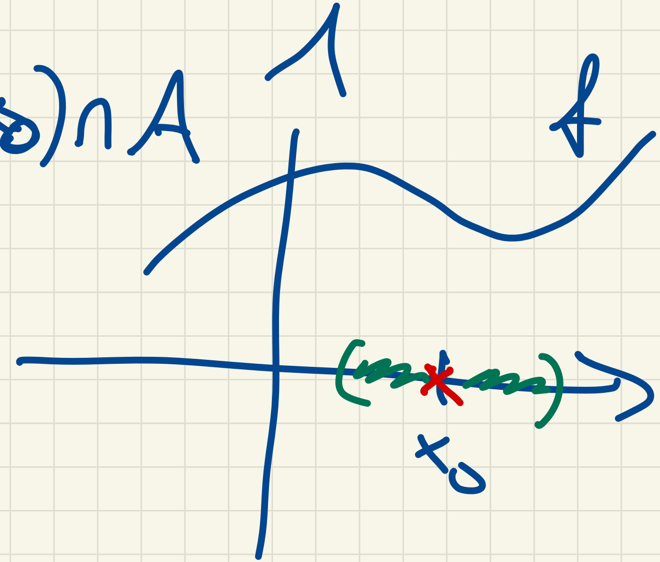
SE $\exists\, \delta > 0$ TALE CHE

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathring{I}_\delta(x_0) \cap A$$

ED ESISTE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

ALLORA $L \geq 0$.



$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ (PERMANENZA DEL SEGNO "STRONG")

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ NON VUOTO. SIA $f: A \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE E SIA x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A. SE $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, ALLORA $\exists\, \delta > 0$ T.C.

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathring{I}_\delta(x_0) \cap A.$$

TEOREMA (DEL CONFRONTO O DEI CARABINIERI)

SIANO f, g, h 3 FUNZIONI DEFINITE SU $A \subseteq \mathbb{R}$ (NON VUOTO).
SIA x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A. SE 1) $\exists\, \delta > 0$ TALE CHE

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in \mathring{I}_\delta(x_0) \cap A$$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$

ALLORA VALE ANCHE

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$= \lim_{x \to x_0} h(x)$$

ESERCIZIO (x CASA)

USARE IL TEOREMA DEI CARABINIERI PER CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

IV.3 ALCUNI LIMITI NOTEVOLI

INNANZITUTTO ADATTIAMO AL CASO DI FUNZIONI DI VARIABILE REALE, LE DEFINIZIONI DI O-PICCOLO E DI EQUIVALENZA ASINTOTICA

- DIREMO CHE "f È O-PICCOLO DI g PER x CHE TENDE A x_0" SE VALE CHE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

NOTAZIONE

$$f(x) = o(g(x))$$
PER $x \to x_0$

- DIREMO CHE
"f È ASINTOTICA A g PER x CHE TENDE A x_0"
SE VALE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

NOTAZIONE

$$\boxed{f(x) \sim g(x) \text{ PER } x \to x_0}$$

CONTINUANO A VALERE LE OSSERVAZIONI FATTE A SUO TEMPO SULL'ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI E DEGLI ASINTOTICI

ABBIAMO IL SEGUENTE TABELLONE DEI LIMITI NOTEVOLI

I $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \sim e$ PER $x \to +\infty$

$\left(\text{OVVERO } \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \right)$

II $\left(1-\frac{1}{x}\right)^x \sim \frac{1}{e}$ PER $x \to +\infty$

III $(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e$ PER $x \to 0$

IV $\log(1+x) \sim x$ PER $x \to 0$

V $e^x - 1 \sim x$ PER $x \to 0$

VI $\sin x \sim x$ PER $x \to 0$

VII $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ PER $x \to 0$

VIII $\tan x \sim x$ PER $x \to 0$

IX $\arctan x \sim x$ PER $x \to 0$

X $\arcsin x \sim x$ PER $x \to 0$

XI PER OGNI $\alpha > 0$

$$(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x \quad \text{PER } x \to 0$$

DIM.

I E II LI ABBIAMO GIÀ VISTI CON $x = n \in \mathbb{N}$ (VEDI CAPITOLO III), QUINDI LI

OMETTO.

III $(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e$ PER $x \to 0$

OVVERO DEVO DIMOSTRARE CHE

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

DIMOSTRO SEPARATAMENTE CHE

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = \lim_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

QUINDI

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

CAMBIO $t = \frac{1}{x}$ OVVERO $\frac{1}{t} = x$

PER (I)

ANALOGAMENTE

$$\lim_{x \to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

CAMBIO $t = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{s \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-s}$$

(CAMBIO $s = -t$)

$$= \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{s}\right)^{s}}$$

$$= \frac{1}{1/e} = e$$

LIMITE I

IV $\log(1+x) \sim x$ PER $x \to 0$

OVVERO VOGLIO CHE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

D'ALTRA PARTE POSSIAMO DIRE CHE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log(1+x)$$

$$\underset{\text{(L2)}}{=} \lim_{x \to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\underset{\substack{\text{LIMITE} \\ \text{III}}}{=} \log e = 1$$

V $\quad e^x - 1 \sim x$ PER $x \to 0$

OVVERO $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

SI FA UN CAMBIO DI VARIABILE

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = $$

CAMBIO

$$\left(\begin{array}{l} x = \log(1+t) \\ e^x = 1+t \\ \text{CIOÈ} \\ e^x - 1 = t \end{array} \right)$$

LIMITE IV

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$$