ANALISI MATEMATICA A

- LEZIONE 18 -

LORENZO BRASCO

27 NOVEMBRE 2020

(D3) DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE

SIANO $f: I \to J$ E $g: K \to I$

SUPPONIAMO CHE g SIA DERIVABILE IN $x_0 \in K$ E CHE f SIA DERIVABILE IN $g(x_0) \in I$. ALLORA

$$f \circ g : K \to J$$

È DERIVABILE IN x_0 E VALE

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

<u>DIM.</u>

USERÒ IL TEOREMA "DERIVATA VS. TANGENTE"

PER IPOTESI f È DERIVABILE IN $g(x_0) \in I$. DAL TEOREMA "DERIVATA VS. TANGENTE"

SAPPIAMO IN PARTICOLARE CHE VALE

$$f(x) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(x - g(x_0)) + o((x - g(x_0)))$$

PER $x \to g(x_0)$

IN PARTICOLARE, USO QUESTA FORMULA CON $x = g(x_0 + h)$ CON $h \to 0$

OSSERVIAMO CHE POSSO EFFETTIVAMENTE USARE

$$\boxed{x = g(x_0+h) \text{ PER } h \to 0}$$

PERCHÈ g È DERIVABILE IN x_0, QUINDI CONTINUA IN x_0, OVVERO

$$g(x_0+h) \longrightarrow g(x_0) \text{ PER } h \to 0.$$

RIPRENDIAMO LA FORMULA CERCHIATA IN ROSSO CON LA SCELTA VERDE

SI OTTIENE

$$f(g(x_0+h)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\left(g(x_0+h)-g(x_0)\right) + o\left(g(x_0+h)-g(x_0)\right)$$

PER $h \to 0$

DIMOSTRIAMO DUNQUE, USANDO QUESTA IDENTITÀ, CHE $f \circ g$ È DERIVABILE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f'(g(x_0)) \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

IDENTITÀ PRECEDENTE

$$\cancel{+ \lim_{h \to 0} \frac{o(g(x_0+h)-g(x_0))}{h}}$$

(VERIFICATELO PER CASA)

$$= f'(g(x_0))\, g'(x_0) \qquad \blacksquare$$

(D4) DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

SIA $f: I \to J$ UNA FUNZIONE BIETTIVA. SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE NEL PUNTO $f^{-1}(y_0)$ e $\in I$ E CHE SI ABBIA $\boxed{f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0}$

ALLORA f^{-1} È DERIVABILE IN y_0 E VALE

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

<u>DIM.</u> ("GRAFICA")

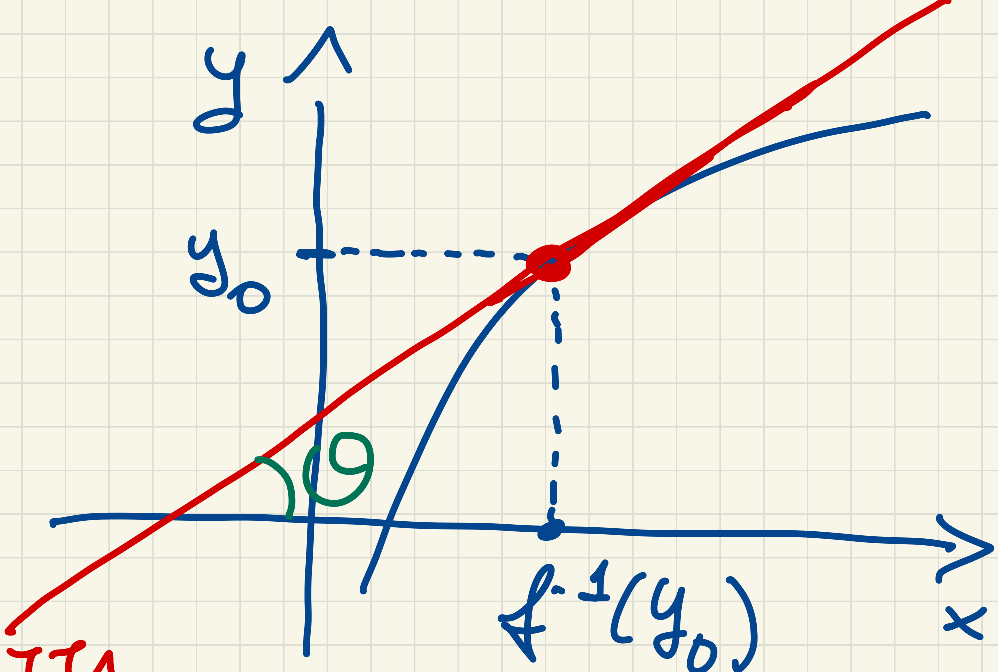


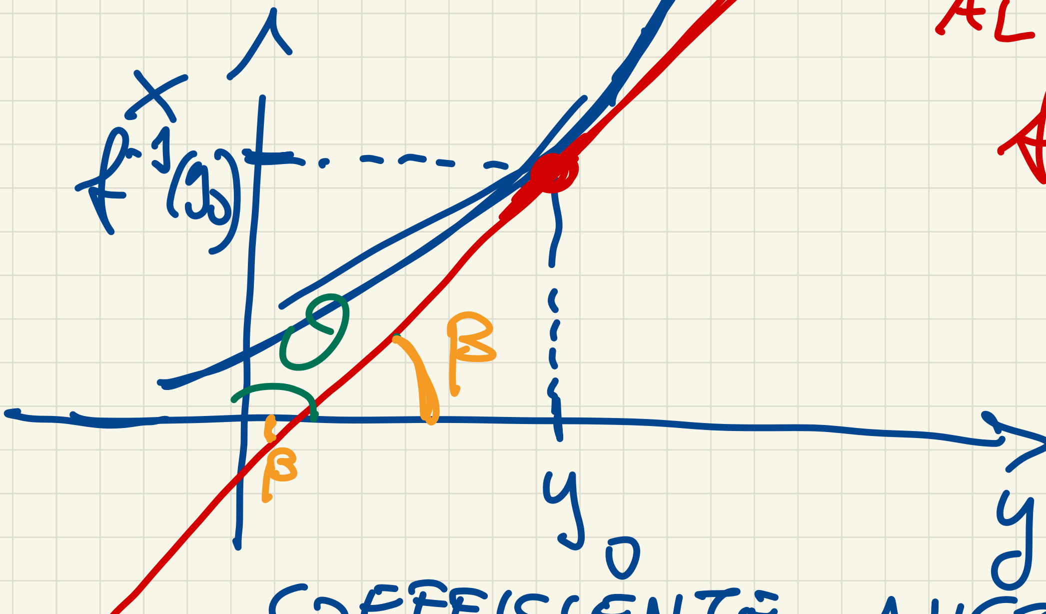
GRAFICO DI f

RETTA TANGENTE IN $\left(f^{-1}(y_0), y_0\right)$

RICORDIAMO CHE QUESTA RETTA HA COEFFICIENTE ANGOLARE

$$\boxed{f'\left(f^{-1}(y_0)\right) = \tan \vartheta}$$

ADESSO GIRIAMO IL FOGLIO



RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f^{-1} IN $(y_0, f^{-1}(y_0))$

NOI SAPPIAMO CHE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI QUESTA RETTA DEVE ESSERE

$$\boxed{\frac{d}{dy} f^{-1}(y_0) = \tan\beta}$$

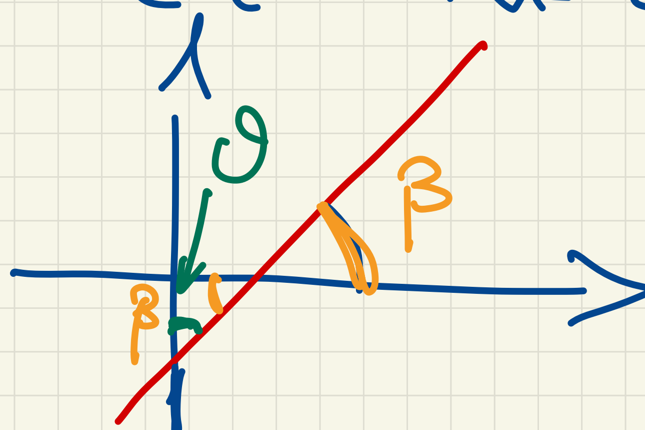
OSSERVO

$$\tan\theta = f'\left(f^{-1}(y_0)\right)$$

$$\tan\beta = \frac{d}{dy} f^{-1}(y_0)$$

CHE RELAZIONE C'È TRA θ E β ?

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$$



QUINDI

$$\frac{d f^{-1}}{dy}(y_0) = \tan\beta$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$= \frac{1}{\tan\vartheta} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

COME VOLEVO

V. 4 "DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI"

POTENZE INTERE PER OGNI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1}, \quad \forall x \neq 0$$

DIM.

LA PRIMA FORMULA L'ABBIAMO VISTA NELLA LEZIONE 17

PER QUANTO RIGUARDA LA SECONDA, OSSERVO CHE

$x \longmapsto x^{-n}$ È COMPOSIZIONE DI

$$x \overset{g}{\longmapsto} \frac{1}{x} \overset{f}{\longmapsto} \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

OVVERO $x^{-n} = f(g(x))$

CON $f(t) = t^n$ E $g(t) = t^{-1}$

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = \frac{d}{dx} f \circ g(x)$$

$$(D3) \; = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$= n\, g(x)^{n-1}\, g'(x)$$

$$= n \frac{1}{x^{n-1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{n}{x^{n+1}} = -n x^{-n-1}$$

$f(t) = t^n$

$\Downarrow$

$f'(t) = n t^{n-1}$

$g(t) = \frac{1}{t}$

$\Downarrow$

$g'(t) = -\frac{1}{t^2}$

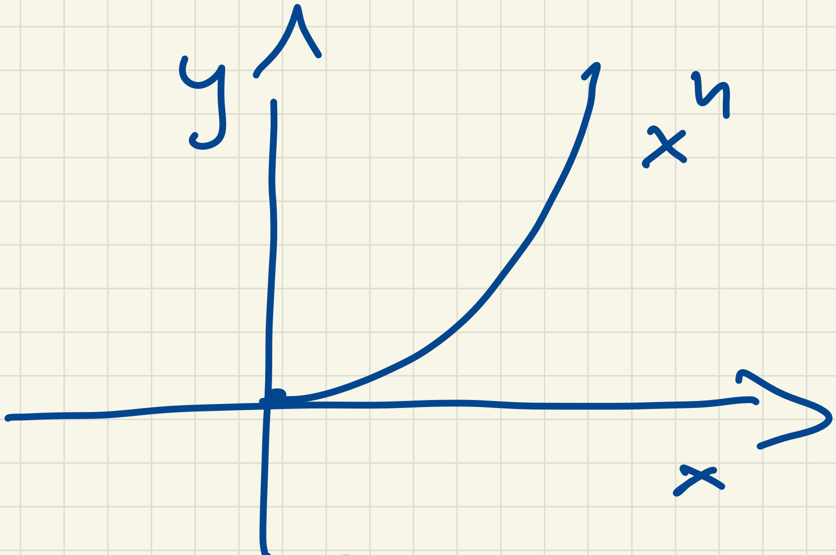
POTENZE RAZIONALI

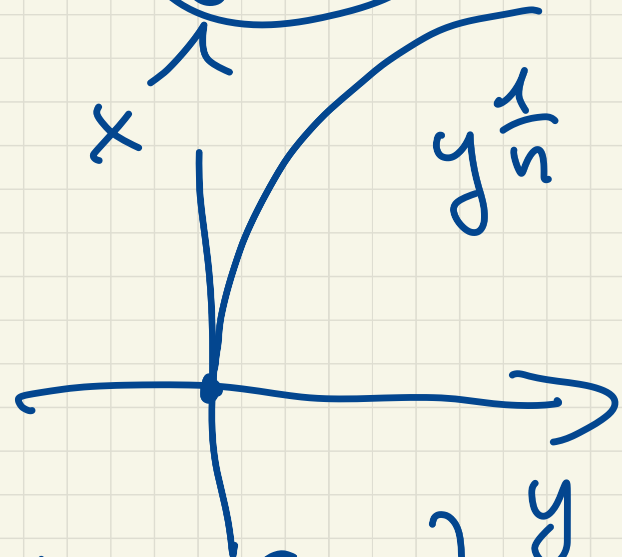
PARTIAMO DALLE RADICI n-ESIME (CHE SONO LE FUNZIONI INVERSE DELLE POTENZE n-ESIMA)

SIA $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, LA FUNZIONE $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$

$$\left(f(x) = x^n \right)$$

È DERIVABILE PER $y \neq 0$





IN BASE ALLA REGOLA (D4)

$$\frac{d}{dy}\sqrt[n]{y} = \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \underset{(D4)}{=} \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

$$= \frac{1}{n\left(f^{-1}(y)\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n\, y^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}$$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}}$$

RIASSUMENDO

$$\frac{d}{dy}\sqrt[n]{y} = \frac{d}{dy} y^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

ESEMPIO 1 $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

② $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

- NEL CASO DI

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

BASTA OSSERVARE CHE SI TRATTA DELLA COMPOSIZIONE DELLE 2 FUNZIONI

$$g_1(x) = x^m \quad \text{E} \quad g_2(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

OVVERO

$$f(x) = g_1\left(g_2(x)\right)$$

ALLORA USANDO LA (D3) SI HA (X CASA)

$$\left\{ \frac{d}{dx} x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \right\}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

SI HA

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1+\tan^2 x, \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

DIM.

PARTIAMO DALLA FORMULA PER IL SENO

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$=$ ADDIZIONE PER IL SENO

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)} + \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$- \frac{\cancel{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)} + \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

RICORDA $\sin t \sim t$ se $t \to 0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\cancel{h}}{\cancel{2}}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x$$

PER QUANTO RIGUARDA IL COSENO, BASTA RICORDARSI CHE

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\overset{(D3)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)$$

$$= -\sin x \qquad \underline{\text{ok}}!$$

INFINE, PER LA DERIVATA DELLA TANGENTE, OSSERVIAMO CHE

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\overbrace{\sin x}^{f} \cdot \overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{g}\right)$$

$$\overset{(D2)}{=} \underbrace{\cancel{\cos x}}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{\cos x}}}_{g} + \underbrace{\sin x}_{f} \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}}_{g'}$$

$$= 1 + \sin x \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1}$$

$$= 1 + \sin x \cdot \left(-(\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) \right)$$

D3

$$= 1 + \sin^2 x \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = 1 + \tan^2 x \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ PROCEDENDO COME PER LA TANGENTE, SI PUÒ DIMOSTRARE LA FORMULA

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

INFATTI, BASTA SCRIVERE

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = f(x)\cdot(g(x))^{-1}$$

E POI USARE (D2) (FATELO X CASA)

ESPONENZIALI E LOGARITMI

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = (\log a) a^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{\log_a e}{x}$$

$\forall x > 0$

DIM.

PRENDIAMO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \frac{(e^h-1)}{h}$$

RICORDA

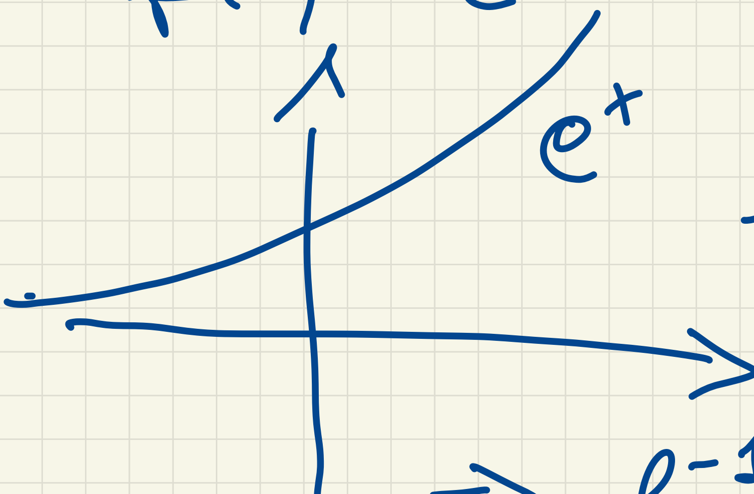
$e^h - 1 \sim h$ SE $h \to 0$

$$= e^x \quad \text{OK!}$$

QUINDI $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$

PER QUANTO RIGUARDA IL LOGARITMO, SCRIVO

$f(x) = e^x$ E $f^{-1}(y) = \log y$



$f'(x) = e^x > 0$

NON SI ANNULLA MAI

$\Rightarrow f^{-1}$ È DERIVABILE SU $(0, +\infty)$

E VALE

$$\frac{d}{dy}\log y = \frac{d}{dy} f^{-1}(y)$$

$$\text{(D4)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

MA

$f(t) = e^t$

e

$f'(t) = e^t$

$$= \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

COME VOLEVO

$$\frac{d}{dx} a^x \quad \text{E} \quad \frac{d}{dx} \log_a x$$

FATELO × CASA

(SUGG. $a^x = e^{\log a^x}$ E POI....)

POTENZE AD ESPONENTE REALE

$x \longmapsto x^\alpha$, CON $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(VI RICORDO CHE QUESTA FUNZIONE È DEFINITA PER $x > 0$)

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d}{dx} e^{\log x^\alpha}$$

$$\overset{(L2)}{=} \frac{d}{dx} e^{\alpha \log x} \quad) \; f(g(x))$$

$$\overset{(D3)}{=} e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$= e^{\log x^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

ok!

OVVERO

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad \forall x > 0$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

(ATTENZIONE! IN $x = -1$ E $x = 1$ LA FUNZIONE NON È DERIVABILE)

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

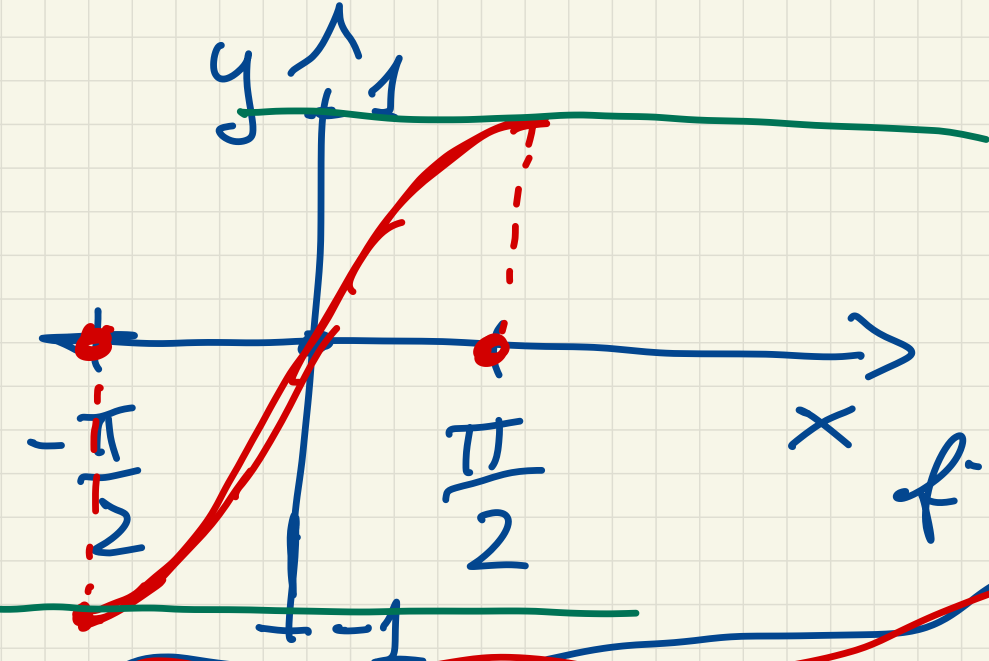
DIM.

VI FACCIO QUELLA DELL'ARCSENO

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(y) = \arcsin y, \quad y \in [-1,1]$$

DOVE È DERIVABILE $f^{-1}(y)$?



TANGENTI ORIZZONTALI

QUINDI IN $y=1$ E $y=-1$ $f^{-1}(y)$ NON È DERIVABILE

OSSERVIAMO CHE $f'(x)=\cos x$

E $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

PER TUTTI GLI ALTRI y,

$f^{-1}(y)$ È DERIVABILE E

VALE

$$\frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{d}{dy} f^{-1}(y)$$

$$(D4) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

RICORDA

$f(t) = \sin t$

$f'(t) = \cos t$

$$= \frac{1}{\cos\left(\arcsin y\right)}$$

RICORDANDO CHE

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}, \quad \forall y \in [-1,1]$$

(V. FOCUS GROUP, ALTRIMENTI VEDI CAPITOLO 2 DELLE DISPENSE, NEGLI ESERCIZI)

SI OTTIENE

$$\boxed{\frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x \qquad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \arctan x$$

x CASA

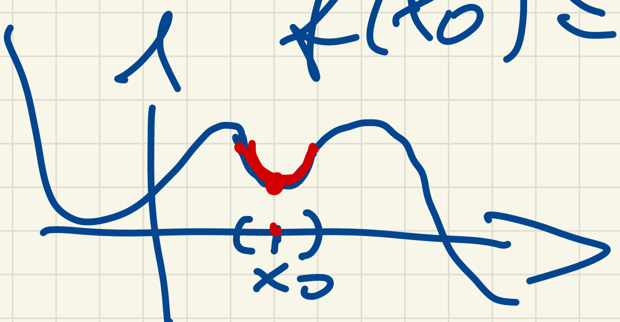
V.5 "TEOREMI SULLE DERIVATE"

TEOREMA (FERMAT)

SIA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ E SIA $x_0 \in (a,b)$ UN PUNTO DI MINIMO LOCALE, OVVERO

TALE CHE

$$f(x_0) \le f(x), \quad \forall x \in \underbrace{I_\delta(x_0)}_{\text{INTORNO CENTRATO IN } x_0 \, (\delta > 0)}$$



SE f È DERIVABILE IN x_0,

ALLORA $f'(x_0) = 0$.

<u>DIM.</u>

PER OGNI h SUFFICIENTEMENTE PICCOLO, SI HA CHE

$$f(x_0+h) \geq f(x_0)$$

IN PARTICOLARE, SE $h > 0$

ALLORA

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \quad (h>0)$$

D'ALTRA PARTE, f È DERIVABILE IN x_0, QUINDI PASSANDO AL LIMITE PER $h \to 0^+$ SI HA

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

PERMANENZA DEL SEGNO "SOFT"

SIMILMENTE, PER OGNI $h < 0$ SUFFICIENTEMENTE PICCOLO VALE

$$f(x_0) \leq f(x_0 + h)$$

CIOÈ $0 \leq f(x_0+h) - f(x_0)$

E DIVIDENDO PER h (NEGATIVO) SI HA

$$0 \geq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

PASSANDO AL LIMITE PER $h \to 0^-$, SI HA QUINDI

$$0 \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

PERMANENZA DEL SEGNO "SOFT"

IN CONCLUSIONE,

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \underline{\underline{E}} \quad f'(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \qquad \blacksquare$$

OSS. 1 IL TEOREMA DI FERMAT VALE ANCHE SE x_0 È P.TO D' MASSIMO LOCALE

2 ATTENZIONE! IL TEOREMA NON VALE SE x_0 NON CASCA ALL'INTERNO DI $[a, b]$.

ESEMPIO $f(x) = x$ SU $[0, 1]$

AMMETTE MASSIMO E MINIMO SU $[0,1]$, CON PUNTO DI MASSIMO $x_M = 1$ E PUNTO DI MINIMO $x_m = 0$.

<u>TUTTAVIA</u>

$$f'(x) = 1 \quad \text{QUINDI}$$

$$f'(x_M) = 1 \neq 0, \quad f'(x_m) = 1 \neq 0$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (ROLLE)

SIA $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

E DERIVABILE SU (a, b).

SE VALE

$$f(a) = f(b)$$

ALLORA $\exists\, x_0 \in (a, b)$ TALE

CHE $f'(x_0) = 0$.

DIM.

DAL MOMENTO CHE f È CONTINUA SU $[a,b]$, DAL TEOREMA DI WEIERSTRASS ESISTE UN PUNTO DI MASSIMO x_M PER f ED ESISTE UN PUNTO DI MINIMO x_m PER f.

POSSONO PRESENTARSI 2 EVENTUALITÀ:

1) ALMENO UNA TRA x_M E x_m È INTERNO ALL'INTERVALLO $[a, b]$, OVVERO APPARTIENE A (a, b)

2) x_M E x_m SI TROVANO SUL "BORDO" DELL'INTERVALLO, CIOÈ COINCIDONO CON a O b

NEL CASO 1), CONCLUDO USANDO IL TEOREMA DI FERMAT OK !

NEL CASO 2), POSSIAMO SUPPORRE CHE $x_M = a$ e $x_m = b$

ALLORA SI AVRÀ $\forall x \in [a,b]$

$$f(b) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(a)$$

DALL' IPOTESI, $f(a) = f(b)$

QUINDI DEVE VALERE L'UGUALE NELLA CATENA PRECEDENTE

OVVERO

$$f(x) = f(a) = f(b), \forall x \in [a, b]$$

$\Rightarrow f$ È COSTANTE, QUINDI

$$f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]. \blacksquare$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CAUCHY)

SIANO $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

CONTINUE, DERIVABILI SU (a, b).

ALLORA $\exists \; x_0 \in (a, b)$

TALE CHE

$$(C) \quad \boxed{g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big)}$$

DIM.

INTRODUCIAMO LA FUNZIONE

$$h(x) = g(x)\left(f(b) - f(a)\right) - f(x)\left(g(b) - g(a)\right)$$

SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE (IN PARTICOLARE, $h(a) = h(b)$)

QUINDI $\exists\, x_0 \in (a, b)$ T.C.

$$0 = h'(x_0)$$

$$= g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big)$$

$$- f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big)$$

ovvero

$$g'(x_0)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(x_0)\big(g(b) - g(a)\big)$$

$\blacksquare$