Analisi Matematica A

– Lezione 19 –

Lorenzo Brasco

2 dicembre 2020

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ ("TEOREMA DI LAGRANGE")

SIA $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

CONTINUA, DERIVABILE SU (a, b).

ALLORA $\exists\, x_0 \in (a, b)$

TALE CHE

$$(L) \quad \boxed{f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a)}$$

DIM.

RICORDIAMOCI CHE DAL TEOREMA DI CAUCHY SAPPIAMO CHE SE ABBIAMO ANCHE $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU $[a,b]$ E DERIVABILE SU (a,b), ALLORA $\exists\, x_0 \in (a,b)$ TALE CHE

$$g'(x_0)\big(f(b)-f(a)\big)=f'(x_0)\big(g(b)-g(a)\big)$$

IN PARTICOLARE, SE PRENDIAMO

$$g(x) = x, \quad \forall x \in [a, b]$$

ED OSSERVIAMO CHE

$g'(x) = 1, \ \forall x$, $g(b) - g(a) = b - a$

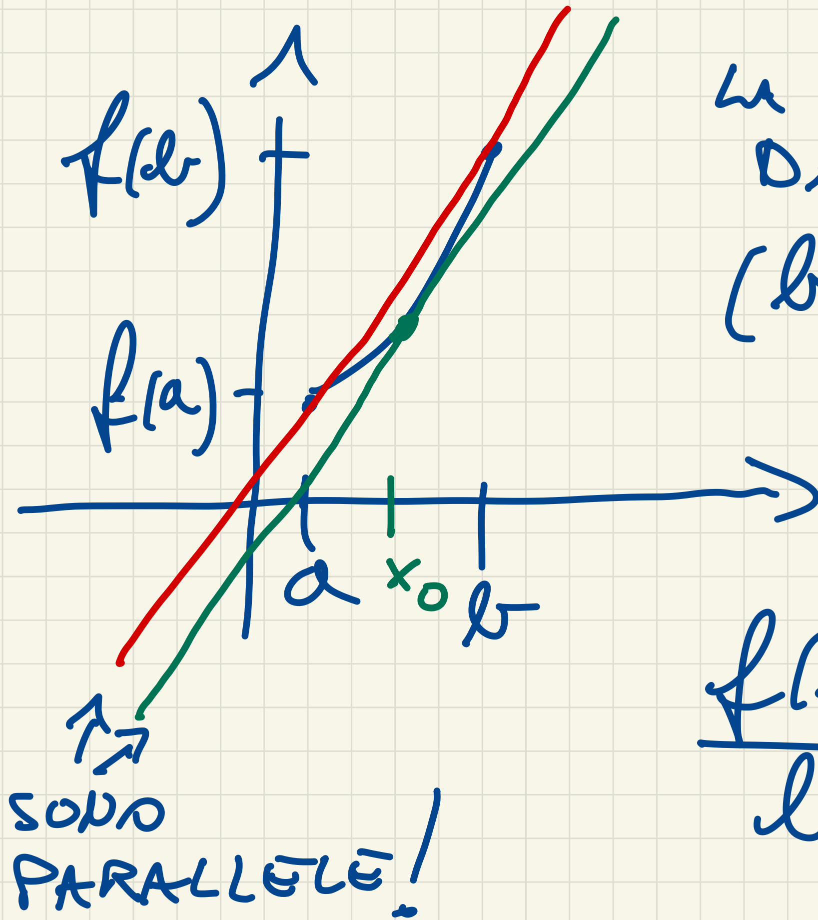
SI OTTIENE ALLORA CHE $\exists x_0 \in (a, b)$

t.c. $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$

CHE È PROPRIO (L)

CHE VOLEVAMO $\blacksquare$

$\boxed{\text{OSS.}}$ (INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI LAGRANGE)



LA RETTA PASSANTE DA $(a, f(a))$ E $(b, f(b))$ HA COEFFICIENTE ANGOLARE DATO DA

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ ("TEST DI MONOTONIA")

SIA $I \subseteq \mathbb{R}$ UN INTERVALLO E SIA $f: I \to \mathbb{R}$ DERIVABILE SU I. ALLORA

"f È CRESCENTE SU I"

$$\iff \text{"} f'(x) \geq 0, \ \forall x \in I \text{"}$$

DIM.

DIMOSTRO L'IMPLICAZIONE

$f'(x) \geq 0 \implies f$ CRESCENTE

L'ALTRA, FATELA x CASA.

SUPPONIAMO QUINDI DI SAPERE CHE $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in I$.

PRENDO $x_0, x_1 \in I$ CON $x_0 < x_1$

USO IL TEOREMA DI LAGRANGE

SULL'INTERVALLO $[x_0, x_1]$

DA CUI OTTENGO CHE ESISTE

$z \in (x_0, x_1)$ T.C.

$$f(x_1) = f(x_0) + \overbrace{\underbrace{f'(z)}_{\geq 0}\ \underbrace{(x_1 - x_0)}_{> 0}}^{\geq 0}$$

PER IPOTESI

$$\geq f(x_0)$$

OVVERO

$\forall x_0 < x_1$, SI HA $f(x_0) \leq f(x_1)$

OVVERO f È CRESCENTE

SU I. ∎

$\boxed{\text{OSS.}}$ 1 CON LA STESSA DIMOSTRAZIONE, SI VEDE FACILMENTE CHE $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \implies$

f È STRETTAMENTE CRESCENTE SU I

(2) OVVIAMENTE VALE ANCHE CHE

f È DECRESCENTE SU I

$\iff f'(x) \leq 0 \,, \quad \forall x \in I$

(SE f È DERIVABILE SU I, I INTERVALLO)

③ IN PARTICOLARE,

f È COSTANTE $\iff$

$f'(x) = 0, \quad \forall x \in I$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ ("LA LATTINA OTTIMA" DAL LIBRO DI TESTO ES. 50, PAG. 244)

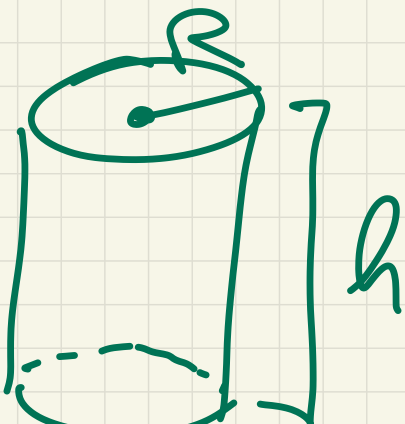
UNA DITTA PRODUTTRICE DI UNA BEVANDA ANALCOOLICA DESIDERA MINIMIZZARE IL COSTO DI

PRODUZIONE DELLE PROPRIE LATTINE DA 33 cl.
LE LATTINE SONO FATTE DI ALLUMINIO, DI FORMA CILINDRICA E SUPPONIAMO CHE IL COSTO DI PRODUZIONE SIA DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLA QUANTITÀ DI ALLUMINIO DA IMPIEGARE.
COME SARÀ FATTA LA LATTINA OTTIMA?

SOL.

COMINCIAMO A FORMALIZZARE IL PROBLEMA.

OGNI LATTINA HA 2 "VARIABILI":



- L'ALTEZZA h
- IL RAGGIO DELLA SEZIONE R

SONO COMPLETAMENTE LIBERE? NO

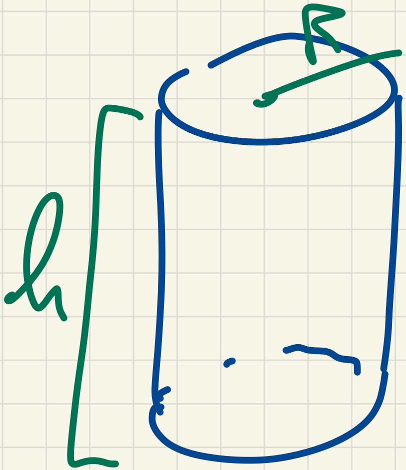
PERCHÉ STIAMO PRESCRIVENDO IL VOLUME (RICORDA IL TESTO DICEVA CHE LE LATTINE AVEVANO UNA CAPIENZA DA 33 cl).

TALE VOLUME ASSEGNATO (INDICHIAMOLO CON

$$V_0$$

h E R SONO LEGATE

DALLA RELAZIONE



$$\pi R^2 h = V_0$$

VOLUME DEL CILINDRO

NOI VOGLIAMO MINIMIZZARE LA SUPERFICIE TOTALE DI QUESTO CILINDRO

CHE È DATA DA

$$S = \underbrace{2\pi R h}_{\text{SUPERFICIE LATERALE}} + \underbrace{2\pi R^2}_{\text{2 TAPPI}}$$

RIEPILOGO :

VOGLIO TROVARE IL MINIMO DI $2\pi R h + 2\pi R^2$

SOTTO IL VINCOLO $\pi R^2 h = V_0$

POSSO USARE IL VINCOLO PER SCRIVERE h IN FUNZIONE DI R

$$h = \frac{V_0}{\pi R^2}$$

SOSTITUENDO NELLA FUNZIONE "SUPERFICIE"

$$S = 2\pi R h + 2\pi R^2 = \frac{2V_0}{R} + 2\pi R^2$$

IN CONCLUSIONE:

VOGLIAMO MINIMIZZARE LA FUNZIONE

$$S(R) = \frac{2V_0}{R} + 2\pi R^2$$

CON $R > 0$.

STUDIAMO ADESSO QUESTO PROBLEMA CON GLI STRUMENTI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE:

TROVIAMO GLI INTERVALLI DI MONOTONIA DI $S(R)$ USANDO IL "TEST DI MONOTONIA"

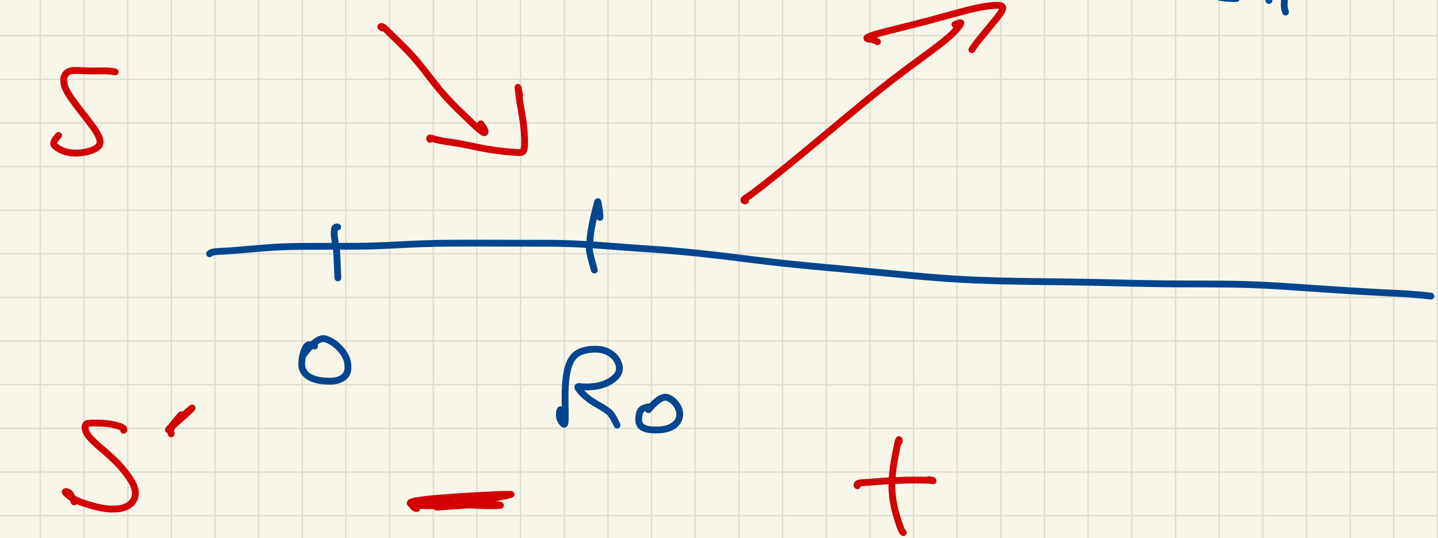
$$S'(R) = -\frac{2V_0}{R^2} + 4\pi R \overset{?}{\geq} 0$$

$$\iff \cancel{4}^{2}\pi R \geq \frac{\cancel{2}V_0}{R^2}$$

$$\iff R^3 \geq \frac{V_0}{2\pi} \iff R \geq \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

OVVERO

$$S'(R) \geq 0 \iff R \geq \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} \stackrel{\text{def}}{=} R_0$$



S(R) È MINIMA PER $R = R_0$

QUINDI $R_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ È

IL RAGGIO OTTIMALE DELLA LATTINA. PER L'ALTEZZA h_0 BASTA USARE CHE

$$\pi R_0^2 h_0 = V_0$$

OVVERO $h_0 = \frac{V_0}{\pi R_0^2}$ $\blacksquare$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ DI UNA FUNZIONE

ABBIAMO VISTO CHE ESISTONO FUNZIONI DEFINITE E CONTINUE SU $D \subseteq \mathbb{R}$, MA DERIVABILI SOLTANTO SU $D' \subsetneq D$

(OVVERO D' È CONTENUTO STRETTAMENTE)

ESEMPIO: ① $f(x) = \sqrt[3]{x}$

È DEFINITA E CONTINUA SU $\mathbb{R}$, MA NON È DERIVABILE IN $x=0$

② $f(x) = \arccos x$

È DEFINITA E CONTINUA SU $[-1, 1]$, MA NON È DERIVABILE IN $x=1$ E $x=-1$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $f : I \to \mathbb{R}$ CONTINUA SU I, CON $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO. SIA $x_0 \in I$, E SUPPONIAMO CHE f SIA DERIVABILE IN $I \setminus \{x_0\}$.

1 SE $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ ESISTE FINITO, $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ ESISTE FINITO, MA I 2 LIMITI NON

COINCIDONO, SI DICE CHE

x_0 È PUNTO ANGOLOSO

② SE $\lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$

OPPURE $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$,

SI DICE CHE x_0 È PUNTO

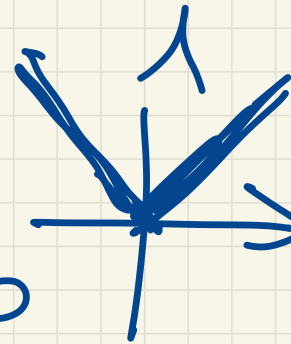
A TANGENTE VERTICALE

③ SE $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$

E $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$

SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI CUSPIDE

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ ① $f(x) = |x|$

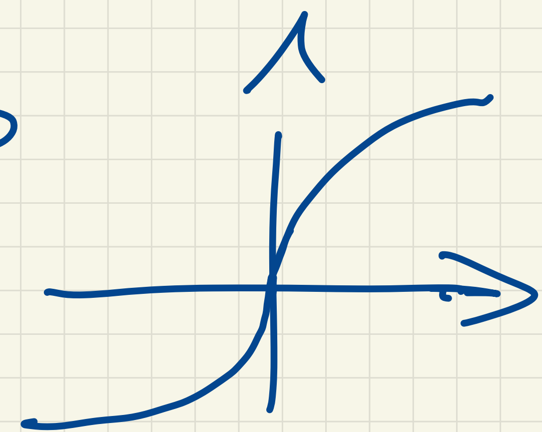


HA UN PUNTO ANGOLOSO IN $x = 0$

② $f(x) = \sqrt[3]{x}$ HA UN PUNTO A TANGENTE VERTICALE IN $x = 0$, INFATTI

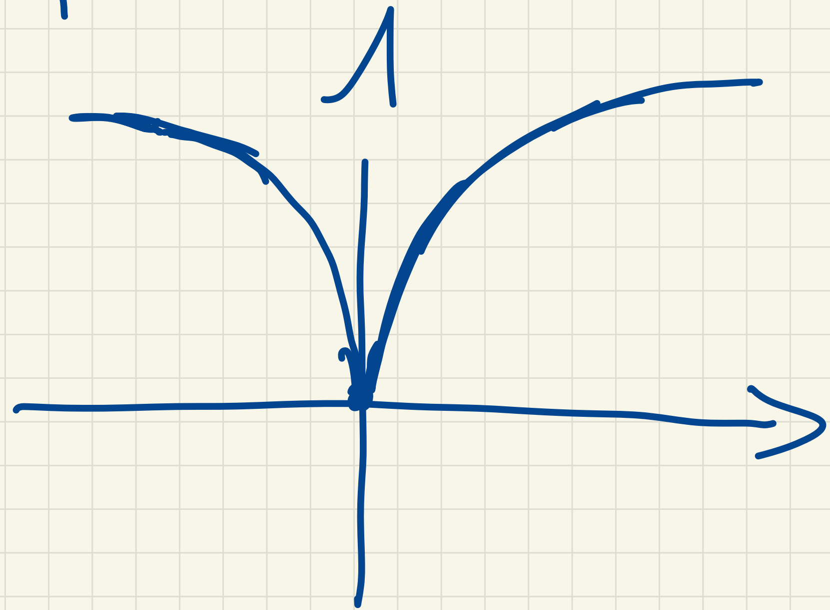
$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ PER $x \neq 0$

E $\lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^{2/3}} = +\infty$



③ $f(x) = \sqrt{|x|}$

HA UN PUNTO DI CUSPIDE IN $x = 0$



RIPRENDIAMO UN LIMITE CHE NON SAPEVAMO FARE (V. LEZIONE 15) OVVERO

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}} \quad ??$$

AVEVAMO VISTO CHE USANDO

$\sin x = x + o(x)$ (PER $x \to 0$) ARRIVAVAMO

A

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+o(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}$$

QUINDI L'INFO

$\sin x = x + o(x)$ PER $x\to 0$

NON ERA SUFFICIENTE

IL NOSTRO LIMITE È DELLA FORMA

$$\frac{x - \sin x}{x^2} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$$

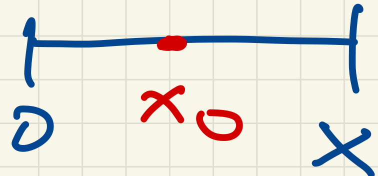
DOVE

$f(x) = x - \sin x$ (QUINDI $f(0) = 0$)

$g(x) = x^2$ (QUINDI $g(0) = 0$)

RICORDA TEOREMA DI CAUCHY

ESISTE $\exists\, x_0 \in (0, x)$



TALE CHE

$$g'(x_0)\big(f(x)-f(0)\big) = f'(x_0)\big(g(x)-g(0)\big)$$

OVVERO

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

ABBIAMO ALLORA, TORNANDO AL NOSTRO LIMITE, CHE

$\exists\, x_0 \in (0, x)$ T.C.

$$\frac{x - \sin x}{x^2} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

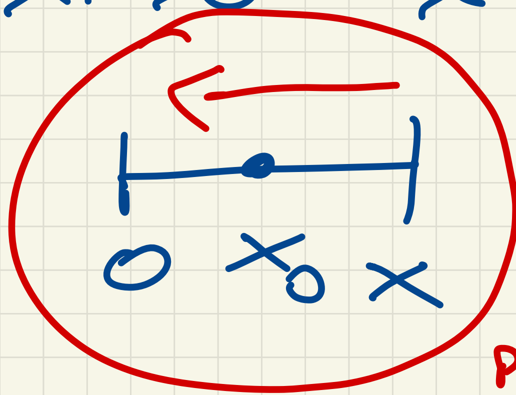
$$= \frac{1 - \cos x_0}{2x_0}$$

RICORDA

- $f(x) = x - \sin x$
- $g(x) = x^2$

OVVERO

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x_0}{2x_0}$$



OSSERVA: QUANDO $x \to 0$, PER COSTRUZIONE $x_0 \to 0$

$$= \lim_{x_0\to 0} \frac{1-\cos x_0}{2x_0}$$

LIMITE NOTEVOLE VII

$$= \lim_{x_0\to 0} \frac{x_0^{\cancel{2}}/2}{2\cancel{x_0}} = 0 \;!!$$

IN CONCLUSIONE

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$$

QUESTO VUOL DIRE CHE

$$x - \sin x = o(x^2) \quad \text{PER } x \to 0$$

OVVERO, RIORDINANDO

$$\boxed{\sin x = x + o(x^2) \quad \text{PER } x \to 0}$$

OSSERVA

PRIMA DI FARE QUESTO LIMITE, IO SAPEVO

$$\sin x = x + o(x) \text{ PER } x \to 0$$

ADESSO HO SCOPERTO CHE

$$\sin x = x + o(x^2) \text{ PER } x \to 0$$

PROVIAMO A FARE UN ALTRO LIMITE SIMILE

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

PROVIAMO AD USARE LA STESSA IDEA DI PRIMA, OVVERO IL TEOREMA DI CAUCHY

CHIAMO

$f(x) = x - \sin x$ (QUINDI $f(0) = 0$)

$g(x) = x^3$ (QUINDI $g(0) = 0$)

ALLORA

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$$

CAUCHY

$$= \lim_{x_0 \to 0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} =$$

$0 \quad x_0 \quad x$

$$= \lim_{x_0 \to 0} \frac{1-\cos x_0}{3x_0^2}$$

$$= \lim_{x_0 \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cancel{x_0^2}}{3 \cancel{x_0^2}} = \frac{1}{6}$$

QUINDI

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$ OVVERO

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \quad \text{PER } x \to 0$$

RISCRIVIAMO QUESTA INFORMAZIONE COME UN'IDENTITÀ ASINTOTICA:

$$\frac{x - \sin x}{x^3} \longrightarrow \frac{1}{6} \quad \text{OVVERO}$$

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1) \quad \text{PER } x \to 0$$

MOLTIPLICANDO TUTTO PER x^3, SI HA

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + \underbrace{x^3 o(1)}_{= o(x^3)} \quad \text{PER } x \to 0$$

OVVERO, RIORDINANDO I TERMINI

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{PER } x \to 0}$$

L'ULTIMA FORMULA SI
CHIAMA
FORMULA DI TAYLOR
PER IL SENO CENTRATA
IN $X=0$ ALL'ORDINE 3

CHE È UN CASO
PARTICOLARE DI...

V. 6 LA FORMULA DI TAYLOR

DERIVATE SUCCESSIVE

SUPPONIAMO CHE $f : I \to \mathbb{R}$ (CON $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO) SIA DERIVABILE SU I.

ABBIAMO QUINDI

$$f' : I \to \mathbb{R} \quad \text{(DERIVATA)}$$

SE f' È A SUA VOLTA DERIVABILE, OVVERO SE

ESISTE FINITO

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}, \quad \forall x_0 \in I$$

POSSIAMO DEFINIRE LA DERIVATA SECONDA DI f COME LA DERIVATA DI f', CHE INDICHIAMO COL SIMBOLO

$$f''(x) \quad \text{OPPURE} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

IN MODO RICORSIVO, POSSO DEFINIRE LA DERIVATA TERZA, LA DERIVATA QUARTA E COSÌ VIA

NOTAZIONE USEREMO UNO DEI 2 SIMBOLI

$$f^{(n)}(x) \quad \text{OPPURE} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

DERIVATA n-ESIMA $(n \in \mathbb{N})$

ESEMPI

1) $f(x) = e^x$

DERIVABILE SU $\mathbb{R}$, CON DERIVATA

$$f'(x) = e^x$$

QUINDI ESSA È A SUA VOLTA DERIVABILE E

$$f''(x) = e^x$$

SI VEDE QUINDI CHE

$f(x) = e^x$ PUÒ ESSERE

DERIVATA INFINITE VOLTE

E $\boxed{\dfrac{d^n f}{dx^n}(x) = e^x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

(2) $f(x) = \sin x$

È DERIVABILE SU $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos x$$

A SUA VOLTA, f' È DERIVABILE SU $\mathbb{R}$ E

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = -\sin x$$

A SUA VOLTA, f'' È DERIVABILE

E VALE

$$f'''(x) = -\cos x$$

CHE A SUA VOLTA È DERIVABILE

E $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$

.... E SI RIPARTE!

$$f^{(5)}(x) = f'(x) = \cos x$$

$f^{(6)}(x) = f''(x) = -\sin x$

E COSÌ VIA

- - - - - - - - - - - - - -

TA-DAN!

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (FORMULA DI TAYLOR)

SIA $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, SIA $f : I \to \mathbb{R}$ DERIVABILE n VOLTE SU I (I È INTERVALLO). SIA $x_0 \in I$, ALLORA VALE LA SEGUENTE IDENTITÀ ASINTOTICA:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{PER } x \to x_0}$$

IN VERDE, SI TRATTA DI UN POLINOMIO DI GRADO n

("POLINOMIO DI TAYLOR DI f DI ORDINE n, CENTRATO IN x_0")

L'IDENTITÀ ASINTOTICA PRECEDENTE SI CHIAMA

FORMULA DI TAYLOR DI f ALL'ORDINE n, CENTRATA IN x_0, CON RESTO DI PEANO

DIM. (PARZIALE)

• CASO $n=1$ IN TAL CASO, LA FORMULA DI

TAYLOR DIVENTA

$$f(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)\right) \quad \text{PER } x \to x_0$$

OVVERO $\left(0! = 1,\quad 1! = 1\right)$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o\left((x-x_0)\right) \quad \text{PER } x \to x_0}$$

QUINDI LA FORMULA PER IL CASO $n=1$ L'ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATA NEL TEOREMA "DERIVATA VS. TANGENTE"

• <u>CASO $n=2$</u>: IN TAL CASO, DOVREMMO DIMOSTRARE CHE

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^2\right)$$

SE $x \to x_0$

OVVERO

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

PER $x \to x_0$

PER DIMOSTRARLO, PARTO DALLA FORMULA PER $n = 1$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0))$$

E SCRIVO

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

DEVO DIMOSTRARE CHE QUESTO RAPPORTO TENDE A $\frac{f''(x_0)}{2}$

PER FARE QUESTO, USO IL
TEOREMA DI CAUCHY CON

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

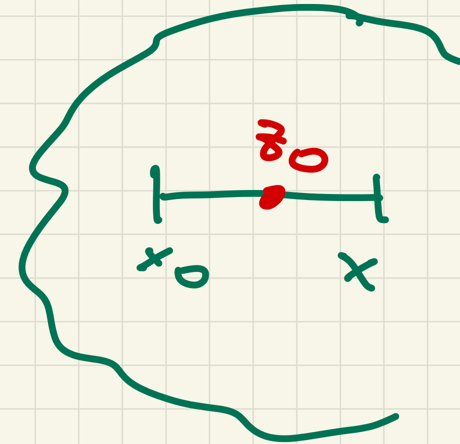
(QUINDI $F(x_0) = 0$)

$$G(x) = (x - x_0)^2$$

(QUINDI $G(x_0) = 0$)

ED ABBIAMO QUINDI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$



$$= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)}$$

$$= \lim_{z_0 \to x_0} \frac{F'(z_0)}{G'(z_0)} = \lim_{z_0 \to x_0} \frac{f'(z_0) - f'(x_0)}{2(z_0 - x_0)}$$

CAUCHY

$$= f''(x_0)/2 \quad \blacksquare$$