ANALISI MATEMATICA A

- LEZIONE 20 -

LORENZO BRASCO

4 DICEMBRE 2020

V. 7 SVILUPPI DI TAYLOR NOTEVOLI

ESPONENZIALE

$$f(x) = e^x$$

DIAMO LO SVILUPPO DI TAYLOR ALL'ORDINE n CENTRATO IN 0

IN GENERALE SI HA SE $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

PER $x \to 0$

OSSERVANDO CHE

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

SI HA

$$f^{(k)}(0) = 1 \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

E QUINDI

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) \quad \text{PER } x \to 0}$$

PIU' ESPLICITAMENTE

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad \text{PER } x \to 0$$

CASO PARTICOLARE $\boxed{n = 1}$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{PER } x \to 0$$

SENO

STAVOLTA $f(x) = \sin x$

DI NUOVO, SCRIVO LO SVILUPPO DI TAYLOR CENTRATO IN $x_0 = 0$

MI SERVONO LE DERIVATE DI f (V. LEZIONE 19)

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x \\ f''(x) = -\sin x & f'''(x) = -\cos x \end{array}}$$

E POI SI RIPARTE!

ABBIAMO QUINDI

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(0)=0 & f'(0)=1 \\ f''(0)=0 & f'''(0)=-1 \end{array}}$$

E POI SI RIPARTE QUINDI

$$\sin x = \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{0} + x + \underset{\substack{\uparrow \\ k=2}}{0} - \frac{x^3}{3!} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=4}}{0} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

PER $x \to 0$

OVVERO

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad \text{PER } x \to 0$$

È LO SVILUPPO ALL'ORDINE 5

"È LO SVILUPPO ALL'ORDINE 6 ?"

AL PRECEDENTE DEVO AGGIUNGERE

IL TERMINE

$$\cancel{f^{(6)}(0)\frac{x^6}{6!}} = 0$$

OVVERO

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

(FORMULA ALL'ORDINE 6)

"È LA FORMULA ALL'ORDINE 7?"

DEVO AGGIUNGERE

$$\frac{f^{(7)}(0)}{7!} x^7 = -\frac{x^7}{7!}$$

OVVERO

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

PER $x \to 0$

(FORMULA DI TAYLOR ALL'ORDINE 7)

"È LA FORMULA ALL'ORDINE 8?"

(PENSATECI....)

COSENO

$f(x) = \cos x$

OSSERVIAMO CHE C'È DI NUOVO UNA CICLICITÀ NELLE DERIVATE, INFATTI

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x & f'''(x) = \sin x \end{array}}$$

E POI SI RIPETE

DA CUI

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(0) = 1 & f'(0) = 0 \\ f''(0) = -1 & f'''(0) = 0 \end{array}}$$

E POI SI RIPETE,

QUINDI LO SVILUPPO DI TAYLOR PER IL COSENO (CENTRATO IN $\underline{\underline{0}}$) HA LA FORMA

$$\cos x = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{0}_{k=1} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{k=2} + \underbrace{0}_{k=3} + \underbrace{\frac{x^4}{4!}}_{k=4} + o(x^4)$$

PER $x \to 0$

(FORMULA ALL'ORDINE 4)

PER QUANTO RIGUARDA LA FORMULA ALL'ORDINE 5, BASTA OSSERVARE $f^{(5)}(0) = 0$

DA CUI SI OTTIENE

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

PER $x \to 0$

"È ALL'ORDINE 6?"

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

PER $x \to 0$

UNA FUNZIONE RAZIONALE

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

VOGLIAMO SVILUPPARLA IN $x=0$.

VEDIAMO COME SONO FATTE LE SUE DERIVATE

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = -2\cdot(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2\cdot(-3)(1-x)^{-4}\cdot(-1)$$

$$= 3!\,(1-x)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 3!\cdot(-4)(1-x)^{-5}\cdot(-1)$$

$$= 4!\,(1-x)^{5}$$

PIÙ IN GENERALE, SI VEDE CHE

(x CASA, USANDO L'INDUZIONE)

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$$

DA CUI VALUTANDOLA IN $x=0$

$$\boxed{f^{(n)}(0) = n!}$$

DI CONSEGUENZA PER

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ VALE IL SEGUENTE SVILUPPO

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{k!}}{\cancel{k!}} x^k + o(x^n)$$

$$= \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n}_{\text{SOMMA GEOMETRICA}} + o(x^n)$$

PER $x \to 0$

DALLO SVILUPPO PRECEDENTE

SI HA ANCHE

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^n + o(x^n)$$

CON

$t = -x$

$$\boxed{\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} t^k + o(t^n) \quad \text{PER } t \to 0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

DA QUESTO A SUA VOLTA, OTTENIAMO

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$t = x^2$

$$\boxed{\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + o\left(t^n\right) \quad \text{SE } t \to 0}$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$$

SE $x \to 0$

LOGARITMO

SIA $g(x) = \log(1-x)$

VOGLIO SVILUPPARLA IN $x=0$

MI SERVONO LE DERIVATE SUCCESSIVE DI g.

USIAMO ANCORA LA NOTAZIONE

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

OSSERVIAMO CHE

$$g'(x) = -\frac{1}{1-x} = -f(x)$$

DA CUI

$$g^{(n)}(x) = -f^{(n-1)}(x), \quad \forall n \geq 1$$

OVVERO

$$\boxed{g^{(n)}(0) = -f^{(n-1)}(0) = -(n-1)! \quad \forall n \geq 1}$$

INOLTRE $\boxed{g(0) = \log 1 = 0}$

ABBIAMO DUNQUE

$$\log(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{-\cancel{(k-1)!}}{\cancel{(k-1)!}\,k} x^k + o(x^n)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{SE } x \to 0$$

OVVERO

$$\boxed{\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \text{SE } x \to 0}$$

$$\log(1+x) = \dots$$

FATELO × CASA

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SVILUPPARE SECONDO TAYLOR IN $x=0$ ALL'ORDINE 5 LA FUNZIONE

$$g(x) = \arctan x$$

SOL.

IN BASE AL TEOREMA DELLA FORMULA DI TAYLOR, SI HA

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{5} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^5) \quad \text{se } x \to 0$$

OSSERVIAMO CHE

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

SVILUPPIAMO QUEST'ULTIMA FUNZIONE ALL'ORDINE 4.

ABBIAMO VISTO CHE

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

OVVERO ABBIAMO CHE

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

OSSERVIAMO CHE SE PONIAMO

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

SI HA

$$\frac{1}{1+x^2} = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

OVVERO CONFRONTANDO LE ESPRESSIONI

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -2 \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = 4!$$

ADESSO MI RICORDO CHE

$$g'(x) = f(x) \Rightarrow g'(0) = f(0) = 1$$

$$g''(x) = f'(x) \Rightarrow g''(0) = f'(0) = 0$$

$$g'''(x) = f''(x) \Rightarrow g'''(0) = f''(0) = -2$$

$$g^{(4)}(x) = f'''(x) \Rightarrow g^{(4)}(0) = f'''(0) = 0$$

$$g^{(5)}(x) = f^{(4)}(x) \Rightarrow g^{(5)}(0) = 4!$$

ABBIAMO QUINDI TUTTI E 5 I COEFFICIENTI

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 + o(x^5)$$

RICAPITOLANDO

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

PER $x \to 0$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SVILUPPARE FINO ALL'ORDINE 3 (CON CENTRO IN 0)

LA FUNZIONE

$$f(x) = \arctan(x^2 - x)$$

SOL.

CI RICORDIAMO CHE (ESERCIZIO PRECEDENTE)

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$$

PER $t \to 0$

IN PARTICOLARE, SI HA ANCHE

$$(S)\quad \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

PER SVILUPPARE $\arctan(x^2 - x)$
VOGLIO USARE (S) CON $t = x^2 - x$

SI OTTIENE

$$\arctan(\underbrace{x^2-x}_{t}) = \underbrace{x^2-x}_{t} - \underbrace{\frac{(x^2-x)^3}{3}}_{-\frac{t^3}{3}} + o\left((x^2-x)^3\right)$$

SE $x \to 0$

HO FINITO? NON ESATTAMENTE,

DEVO CALCOLARE ESPLICITAMENTE

TUTTI I TERMINI CHE

HANNO ORDINE 0, 1, 2 E 3

E POI TUTTI GLI ALTRI

LI DEVO TRATTARE COME

$o(x^3)$.

SPIEGHIAMO MEGLIO:

ORDINE 1

$$\operatorname{arctan}(x^2-x) = x^2 - x - \frac{x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3}{3} + o\left((x^2-x)^3\right)$$

ORDINE 2

$= o(x^3)$

$= o(x^3)$

$o(x^3)$

ORDINE 3

RICORDA

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

OSSERVANDO CHE

$$(x^2-x)^3 \sim -x^3$$

SI HA INOLTRE CHE

$$o\left((x^2-x)^3\right) = o(x^3) \quad \text{SE } x \to 0$$

METTENDO TUTTO INSIEME SI HA

$$\arctan(x^2-x) = x^2 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

OVVERO

$$\boxed{\arctan(x^2-x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

ESERCIZIO

SVILUPPARE CON TAYLOR ALL'ORDINE 2 IN $x=0$ LA FUNZIONE

$$f(x)=e^{x^2+x}$$

SOL.

RICORDIAMOCI

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad \text{SE } t \to 0$$

LO VOGLIO USARE CON $t = x^2+x$

ABBIAMO ALLORA

$$e^{x^2+x} = 1 + \underbrace{(x^2+x)}_{t} + \underbrace{\frac{(x^2+x)^2}{2}}_{t^2/2}$$

$$\underbrace{(x^2+x)^2 \sim x^2}$$

$$+ o\left((x^2+x)^2\right) \text{ SE } x \to 0$$

$$= 1 + x^2 + x + \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{2} + o(x^2) \text{ SE } x \to 0$$

SONO $o(x^2)$

OVVERO

$$e^{x^2+x} = 1+x^2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$= 1+x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

SE $x \to 0$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SVILUPPARE CON TAYLOR ALL'ORDINE 3 IN $x=0$ LA FUNZIONE $f(x)=\sqrt{(1+x)^3}=(1+x)^{\frac{3}{2}}$

SOL.

MI RICORDO CHE

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

CALCOLIAMOCI I COEFFICIENTI

$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ E $f'''(0)$

SAPENDO CHE $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(0) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow f''(0) = \frac{3}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'''(0) = -\frac{3}{8}$$

DA CUI OTTENIAMO

$$\sqrt{(1+x)^3} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x^2 - x) + e^x - \sqrt{(1+x^2)^3}}{\log(1+x^3)}$$

SOL.

FORMA INDETERMINATA $\frac{0}{0}$

DOBBIAMO CAPIRE "COME" VANNO A 0 NUMERATORE E DENOMINATORE

PARTIAMO DAL DENOMINATORE

RICORDANDO CHE

$$\log(1+t) = t + o(t), \quad t \to 0$$

CON $t = x^3$, SI HA

$$\boxed{\log(1+x^3) = x^3 + o(x^3) \quad \text{PER } x \to 0}$$

CONSIDERIAMO ADESSO

IL NUMERATORE.

A CHE ORDINE DEVO ARRIVARE?

PROVIAMO AD ESSERE "PIGRI"

E A SVILUPPARE ALL'ORDINE 1:

$$\arctan t = t + o(t) \quad \text{SE } t \to 0$$

DA CUI $(t = x^2 - x)$

$$\arctan(x^2 - x) = x^2 - x + o(x^2 - x)$$

$$= -x + o(x)$$

PERCHÉ $x^2 = o(x)$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{SE } x \to 0$$

INFINE, RICORDANDO CHE (VISTO PRIMA)

$$\sqrt{(1+t)^3} = 1 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{t^3}{16} + o(t^3) \quad \text{SE } t \to 0$$

$$= 1 + \frac{3}{2}t + o(t)$$

LO USO CON $t = x^2$

ABBIAMO

$$\sqrt{(1+x^2)^3} = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + o(x) \quad \text{SE } x \to 0$$

QUINDI, METTENDO TUTTO INSIEME PER IL NUMERATORE OTTENIAMO (SVILUPPANDO ALL'ORDINE 1)

$$\arctan(x^2 - x) + e^x - \sqrt{(1+x^2)^3} =$$

$$= \underbrace{-\cancel{x} + o(x)} + \underbrace{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x)}$$

$$\underbrace{- \cancel{1} + o(x)}$$

$$= o(x)$$

QUINDI CI TROVEREMMO CON

$$\frac{\arctan(x^2 - x) + e^x - \sqrt{(1+x)^3}}{\log(1+x^3)} = \frac{o(x)}{x^3 + o(x^3)}$$

NON SERVE!

DOVREI AVER CAPITO CHE DEVO SVILUPPARE ALL'ORDINE 3 ANCHE IL NUMERATORE.

ABBIAMO ALLORA

- $\arctan(x^2 - x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ SE $x \to 0$

(VISTO PRIMA, PRIMO ESERCIZIO DELLA LEZIONE 20.II)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

INFINE PER $\sqrt{(1+x^2)^3}$ POSSO USARE CHE

$$\sqrt{(1+t)^3} = 1 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{t^3}{16} + o(t^3)$$

CON $t = x^2$, OTTENGO

$$\sqrt{(1+x^2)^3} = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \overbrace{\frac{3}{8}x^4 - \frac{x^6}{16} + o(x^6)}^{=o(x^3)}$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)$$

IN CONCLUSIONE, PER IL NUMERATORE OTTENIAMO

$$\arctan(x^2-x)+e^x-\sqrt{(1+x^2)^3}$$

$$=\left(-\cancel{x}+\cancel{x^2}+\frac{x^3}{3}\right)+\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{6}\right)$$

$$-\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{3}{2}x^2}\right)+o(x^3)$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=\boxed{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}$$

SIAMO QUINDI PRONTI A DARE LA SOLUZIONE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2-x)+e^x-\sqrt{(1+x^2)^3}}{\log(1+x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

■