ANALISI MATEMATICA A

- LEZIONE 22 -

LORENZO BRASCO

11 DICEMBRE 2020

ABBIAMO VISTO NELL'ULTIMA LEZIONE CHE, GRAZIE AL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE,

IL CALCOLO DI

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

CON f CONTINUA SU $[a,b]$

SI RICONDUCE A CERCARE UNA

PRIMITIVA DI f, OVVERO DI UNA FUNZIONE G T.C.

$$G'(x) = f(x), \ \forall x \in (a, b)$$

UNA VOLTA TROVATA G, ABBIAMO VISTO CHE

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

$\boxed{\text{NOTAZIONE}}$ USIAMO $\left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ 1 $\int_0^1 x \, dx$

DEVO TROVARE G T.C.

$$G'(x) = x$$

RICORDATE CHE $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

SI HA ALLORA

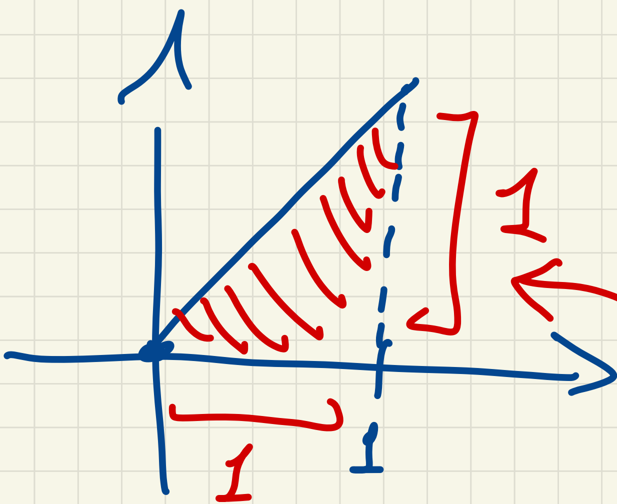
$$G(x) = \frac{x^2}{2}$$

$\left(\underline{\text{VERIFICA}}: \; G'(x) = \frac{2x}{2} = x \; \underline{\text{ok}} \right)$

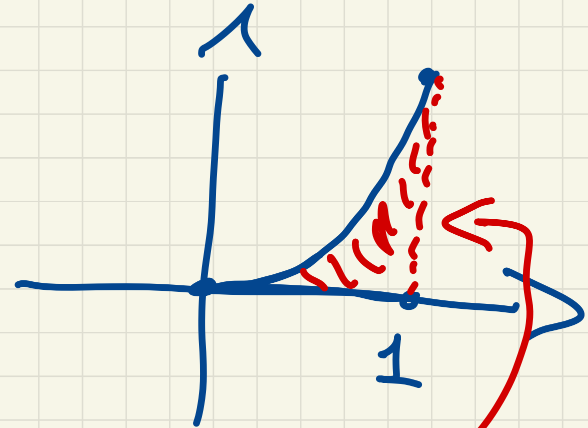
QUINDI

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{AREA DEL TRIANGOLO}}$$



② $\int_0^1 x^2 dx$



UNA PRIMITIVA È DATA DA

$$G(x) = \frac{x^3}{3}$$

(VERIFICA: $G'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = x^2$ ok)

ALLORA

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

③ PIÙ IN GENERALE, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA

$$\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

④ POSSIAMO QUINDI INTEGRARE QUALSIASI POLINOMIO

$$\int_0^1 \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \right] dx$$

$$= a_0 \int_0^1 dx + a_1 \int_0^1 x\, dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$$+ \dots + a_n \int_0^1 x^n dx$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

⑤ $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$

MI SERVE UNA PRIMITIVA DI

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

SAREI TENTATO DI DIRE

$$G(x) = \log x$$

MA QUESTA NON VA BENE...
PERCHÉ G È DEFINITA SU $(0, +\infty)$

MENTRE A NOI SERVE UNA PRIMITIVA SU $[-3,-1]$.

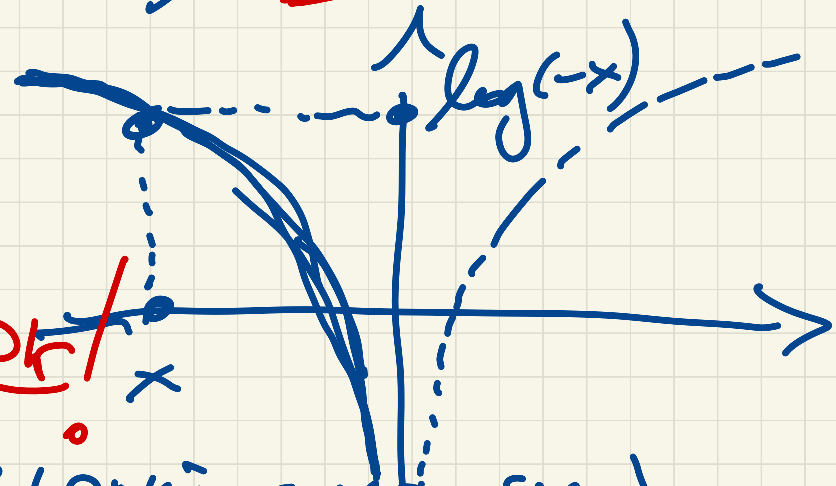
QUINDI? PROVIAMO CON

$$G(x) = \log(-x) \quad \text{CON} \quad x<0$$

SI HA

$$G'(x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1)$$

$$= \frac{1}{x} \quad \text{ok!}$$



(DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA)

QUINDI

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log(-x)\Big]_{-3}^{-1}$$

$$= \cancel{\log 1} - \log 3$$

$$= -\log 3$$

⑥ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ RICORDIAMOCI CHE

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

QUINDI

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^1$$

$$= \arctan(1) - \arctan(0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

<u>RICORDA</u> $\arctan(y) =$ "L'UNICA $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ T.C. $\tan x = y$"

A QUESTO PUNTO, È VENUTO IL MOMENTO DI

DIM. (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO)

CONSIDERIAMO

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [a, b]$$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

INNANZITUTTO, OSSERVIAMO CHE $F(x)$ È BEN DEFINITA PERCHÉ f È CONTINUA SU $[a,b]$ (PER IPOTESI) E DUNQUE PER IL TEOREMA VISTO A LEZIONE 21, È INTEGRABILE SU $[a,x]$, PER OGNI $x \in [a,b]$

DIMOSTRIAMO ADESSO CHE
PRESO $x \in (a,b)$, F È
DERIVABILE IN x E VALE

$$F'(x) = f(x).$$

DEVO FAR VEDERE CHE

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

PER SEMPLICITÀ, MI LIMITO A FAR

VEDERE CHE

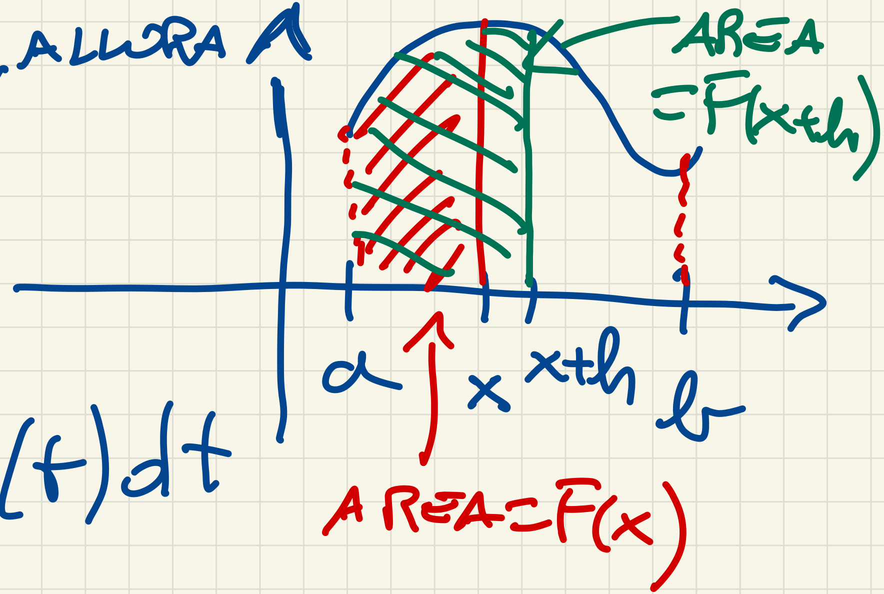
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

IL FATTO CHE VALGA ANCHE

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

LO LASCIO PER CASA.

PRENDIAMO $h>0$, ALLORA



$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

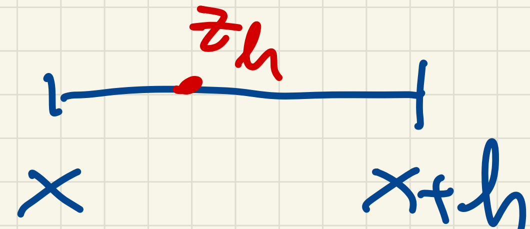
$$= \frac{\cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt}}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \quad \Big]$$

MEDIA INTEGRALE DI f SU $[x, x+h]$

AMPIEZZA DELL'INTERVALLO

$$= f(z_h)$$



PROPOSIZIONE "MEDIA INTEGRALE"

$\Big(=$ $\exists\, z_h \in [x, x+h]$ T.C. VALE .... $\Big)$

QUINDI DATO $x \in (a,b)$, PER OGNI $h>0$ "PICCOLO"

$\exists\ z_h \in [x, x+h]$ T.C.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(z_h)$$

ADESSO DEVO PASSARE AL LIMITE PER $h \to 0$

OSSERVO CHE SE

$h \to 0$, PER COSTRUZIONE

$z_h \longrightarrow x$.

INOLTRE, f È CONTINUA SU

$[a, b]$, QUINDI

$$f(z_h) \longrightarrow f(x) \quad \text{SE } h \to 0$$

IN CONCLUSIONE

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(z_h)$$

$$= f(x)$$

COME VOLEVAMO ■

$\boxed{\text{NOTAZIONE}}$ USEREMO IL SIMBOLO DI INTEGRALE INDEFINITO

$\int f(x)\,dx$ PER INDICARE <u>UNA</u> PRIMITIVA

VI . 4 TECNICHE DI INTEGRAZIONE

ABBIAMO VISTO CHE, DA UN PUNTO DI VISTA OPERATIVO, IL CALCOLO DI $\int_a^b f(x)\,dx$ SI RIDUCE ALLA RICERCA DI UNA PRIMITIVA.

QUINDI, OPERATIVAMENTE, POSSIAMO DIRE CHE IL CALCOLO DI UN INTEGRALE È L'OPERAZIONE INVERSA DEL

CALCOLO DI UNA DERIVATA.

QUESTA AFFERMAZIONE, DOVREBBE RENDERE CHIARO CHÉ OGNI REGOLA DI DERIVAZIONE (V. CAPITOLO V) DÀ LUOGO AD UNA REGOLA DI INTEGRAZIONE.

IN PARTICOLARE

(D2) = "DERIVATA DEL PRODOTTO"

(D3) = "DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE"

(I2) INTEGRAZIONE PER PARTI

PROPOSIZIONE SIANO $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ DUE FUNZIONI DERIVABILI.

ALLORA SI HA

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

DIM.

SI RICORDI CHE DA (D2)
NOI SAPPIAMO CHE

$$(fg)' = f'g + fg'$$

DA CUI

$$\int_a^b \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \right] dx$$

$$= \int_a^b (f(x)g(x))' dx =$$

$$= \Big[f(x)g(x) \Big]_a^b$$

OVVERO

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x) \Big]_a^b$$

OVVERO

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\int_1^2 x e^x \, dx$$

SOL.

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{f'(x)} \, dx = \left[\underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{f(x)} \right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f(x)} dx$$

$$= \left[2e^2 - e \right] - \int_1^2 e^x dx$$

$$= \left[2e^2 - e\right] - \left[e^x\right]_1^2$$

$$= \cancel{2}e^2 - \cancel{e} - \left[\cancel{e^2} - \cancel{e}\right]$$

$$= e^2 \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx$$

Sol.

$$\int_0^1 \underbrace{x^2}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{f'(x)} dx = \Big[\overbrace{x^2}^{g(x)} \overbrace{e^x}^{f(x)} \Big]_0^1$$

$$- \int_0^1 \underbrace{2x}_{g'(x)} \underbrace{e^x}_{f(x)} dx$$

$$= e - 2\int_0^1 x e^x dx =$$

$$= e - 2\int_0^1 \underbrace{x}_{g(x)}\, \underbrace{e^x}_{f'(x)}\, dx$$

$$= e - 2\left[\left[\underbrace{x}_{g(x)}\, \underbrace{e^x}_{f(x)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \overbrace{e^x}^{f(x)}\, dx \right]$$

$$= e - 2\left[e - \left[e^x\right]_0^1 \right]$$

$$= e - 2\left(\cancel{e} - (\cancel{e} - 1)\right)$$

$$= e - 2 \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\int_2^3 \log x \, dx$$

SOL. USIAMO (I2) E UN PO' DI "FANTASIA"

$$\int_2^3 \log x \, dx = \int_2^3 \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\log x}_{g(x)} \, dx$$

(I2)

$$= \Big[\underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\log x}_{g(x)}\Big]_2^3 - \int_2^3 \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \, dx$$

$$= 3\log 3 - 2\log 2 - \int_2^3 dx$$

$= \log\frac{27}{4} - [x]_2^3$

$= \log\frac{27}{4} - 1$ ◪

$27 = 3^3$

$4 = 2^2$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ TROVARE UNA PRIMITIVA DI $f(x) = x^2 \log x$ DEFINITA SU $(0, +\infty)$

SOL.

$$\int \underbrace{x^2}_{f'(x)} \underbrace{\log x}_{g(x)} \, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f(x)} \underbrace{\log x}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3}}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}_{g'(x)} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^2}{3} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} = G(x)$$

<u>VERIFICA</u>:

$$G'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}\log x + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{3x^2}{9}$$

$$= x^2\log x + \cancel{\frac{x^2}{3}} - \cancel{\frac{x^2}{3}}$$

$$= x^2\log x$$ <u>ok!</u> $\blacksquare$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

SOL.

PROVIAMO AD USARE L'INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{g(x)}\,dx =$$

$$= \Big[\underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{g(x)}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}_{g(x)}\,dx$$

$$= 0 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,dx$$

OVVERO, RIASSUMENDO ABBIAMO OTTENUTO

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

OVVERO

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

IN CONCLUSIONE

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\arcsin x\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arcsin(1) - \arcsin(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI QUESTO RISULTATO:

ABBIAMO CALCOLATO L'AREA DEL SOTTOGRAFICO DI $\sqrt{1-x^2}$

$$\Gamma\left(\sqrt{1-x^2}, [0,1]\right)$$

$$= \left\{ (x,y) : \quad x \in [0,1], \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

COM'È FATTO QUESTO INSIEME?

VEDIAMO CHI È IL GRAFICO DI

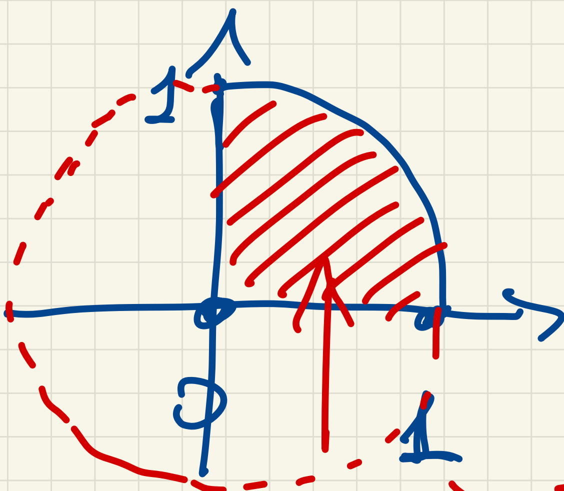
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

PER DEFINIZIONE, SONO I PUNTI DELLA FORMA (x,y) CON $y = \sqrt{1-x^2}$

OVVERO

$$y=\sqrt{1-x^2} \implies y^2 = 1-x^2$$

$$\implies x^2+y^2 = 1$$



CIOÈ QUESTO GRAFICO È UN PEZZO DEL CERCHIO DI CENTRO $(0,0)$ E RAGGIO 1

AREA È $\pi/4$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ TROVARE UNA PRIMITIVA DI $f(x) = \cos^2 x$

SOL.

SI PUÒ FARE PER PARTI (x CASA).

OPPURE USANDO LA TRIGONOMETRIA.

DALLA FORMULA DI BISEZIONE

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

QUINDI

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

$\blacksquare$

OSSERVA

$$\frac{d}{dx} \sin(2x) = \cos(2x) \cdot 2$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SI TROVI UNA PRIMITIVA DI $f(x) = \cos^3 x$

SOL.

PROVIAMO PER PARTI

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{g(x)} \, dx$$

$$= \underbrace{\sin x}_{f(x)} \underbrace{\cos^2 x}_{g(x)} - \int \underbrace{\sin x}_{f(x)} \underbrace{2\cos x \cdot (-\sin x)}_{g'(x)} dx$$

$$= \sin x \cos^2 x + 2\int \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$= \sin x \cos^2 x + 2\int (1-\cos^2 x)\cos x \, dx$$

$$= \sin x \cos^2 x + 2\int \cos x \, dx$$

$$- 2\int \cos^3 x \, dx$$

OVVERO ABBIAMO
L'IDENTITÀ

$$\int \cos^3 x \, dx = \sin x \cos^2 x + 2 \sin x$$
$$- 2 \int \cos^3 x \, dx$$

DA CUI

$$3 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cos^2 x + 2 \sin x$$

OVVERO, DIVIDENDO PER 3,

$$G(x) = \frac{\sin x \cos^2 x + 2 \sin x}{3}$$ È UNA PRIMITIVA DI $\cos^3 x$ $\blacksquare$

(I3) CAMBIO DI VARIABILE

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA E SIA $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ UNA FUNZIONE BIETTIVA DERIVABILE (φ SI CHIAMA "CAMBIO DI VARIABILE")

ALLORA VALE $x=\varphi(t)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

DIM.

SIA G UNA PRIMITIVA DI f,
ALLORA DAL TEOREMA
FONDAMENTALE DEL CALCOLO
INTEGRALE ABBIAMO

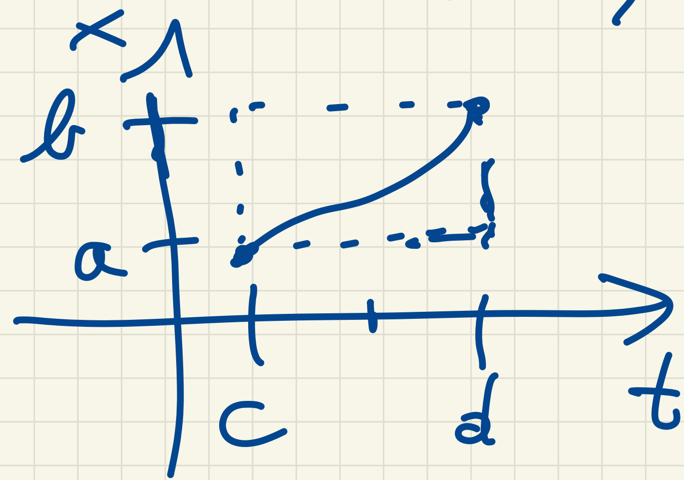
$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

D'ALTRA PARTE, DALLA REGOLA
DI DERIVAZIONE (D3), SAPPIAMO

CHE LA DERIVATA DI

$$\tilde{G}(t) = G \circ \varphi(t) = G(\varphi(t))$$

È DATA DA



$$\tilde{G}'(t) = G'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

$$= f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$$

G È PRIMITIVA DI f

QUINDI, DI NUOVO PER IL TEOREMA FONDAMENTALE

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$$= \left[\tilde{G}(t)\right]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}$$

$\tilde{G}(t) = G(\varphi(t))$

$$= \tilde{G}(\varphi^{-1}(b)) - \tilde{G}(\varphi^{-1}(a))$$

$$= G\Big(\underbrace{\varphi\big(\varphi^{-1}(b)\big)}_{=b}\Big) - G\Big(\underbrace{\varphi\big(\varphi^{-1}(a)\big)}_{=a}\Big)$$

$$= G(b) - G(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$