ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 23 –

LORENZO BRASCO

16 DICEMBRE 2020

RICORDIAMO CHE L'ULTIMA VOLTA ABBIAMO VISTO LA FORMULA

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

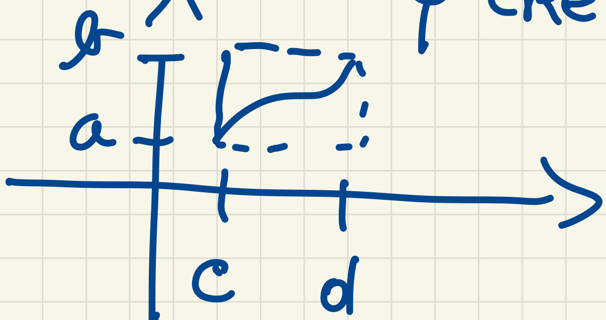
CON $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$

DERIVABILE E BIETTIVA

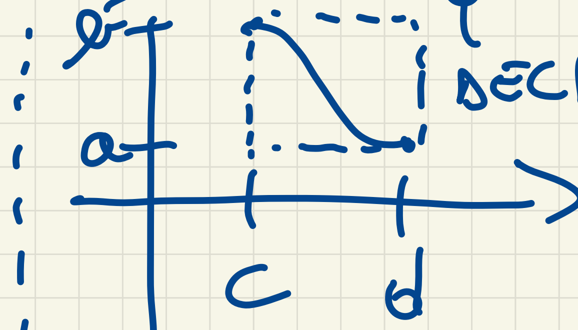
NOTAZIONE

NEL CASO $a < b$, SI SCRIVE

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$



φ CRESCENTE



φ DECRESCENTE

ESERCIZIO CALCOLARE

$$\int_1^2 \cos(3x+2)\,dx$$

SOL.

EFFETTUIAMO IL CAMBIO DI VARIABILE $3x+2=t$

OVVERO $\boxed{x = \dfrac{t-2}{3} = \varphi(t)}$

QUINDI $\left(\varphi'(t)=\frac{1}{3}\right)$

$$\int_1^2 \cos(3x+2)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(1)}^{\varphi^{-1}(2)} \cos t \,\frac{1}{3}\,dt$$

CI MANCANO GLI ESTREMI

$$\varphi(t) = \frac{t-2}{3}$$

$$\varphi^{-1}(x) = 3x+2$$

DA CUI

$\varphi^{-1}(1) = 5$

$\varphi^{-1}(2) = 8$

RICORDATE SEMPRE:

$\varphi^{-1}(1) =$ "L'UNICO t T.C. $\varphi(t) = 1$"

$=$ "L'UNICO t T.C. $\dfrac{t-2}{3} = 1$"

$=$ "$t = 3+2 = 5$"

QUINDI

$$\int_1^2 \cos(3x+2)\,dx = \int_5^8 \frac{1}{3}\cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\sin t\Big]_5^8$$

$$= \frac{\sin(8)-\sin(5)}{3}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SIA $\alpha > 0$,

TROVARE UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE

$$f(x) = \frac{1}{\alpha + x^2}$$

SOL.

OSSERVIAMO CHE SE $\alpha = 1$,

ALLORA $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

PROBABILMENTE DEVO ASPETTARMI CHE ANCHE PER $\alpha > 0$ GENERICO, SALTI FUORI UNA ARCOTANGENTE.

COMINCIO CON DELLE MANIPOLAZIONI ALGEBRICHE:

$$\frac{1}{\alpha + x^2} = \frac{1}{\alpha\left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

QUESTI CALCOLI MI STANNO SUGGERENDO DI FARE UN CAMBIO

$$\boxed{\frac{x}{\sqrt{\alpha}} = t}$$

OVVERO $\boxed{x = \sqrt{\alpha}\, t}$

$$\overset{\parallel}{\varphi(t)}$$

DA CUI $dx = \underbrace{\sqrt{\alpha}}_{\varphi'(t)}\, dt$

ABBIAMO QUINDI

$$\int \frac{1}{\alpha+x^2}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}\,\underbrace{dx}$$

$$\left(\begin{array}{l} x=\sqrt{\alpha}\,t \\ dx=\sqrt{\alpha}\,dt \end{array}\right) = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1+t^2}\,\underbrace{\sqrt{\alpha}\,dt}_{\varphi'(t)\,dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan(t)$$

L'ESERCIZIO NON È ANCORA FINITO! DEVO TORNARE "INDIETRO" ALLA VECCHIA VARIABILE $x = \sqrt{\alpha}\, t$

OVVERO $t = \frac{x}{\sqrt{\alpha}}$ DA CUI

$$\int \frac{1}{\alpha + x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SI TROVI UNA PRIMITIVA DI

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

SOL.

TENTATIVO INGENUO: PONGO

$x+x^2 = t$ OVVERO $t = \varphi^{-1}(x) = x+x^2$

DEVO INVERTIRE PER POTER SCRIVERE

$x = \varphi(t)$.

DA

$$x^2 + x = t$$ OTTENGO

$$x^2 + x - t = 0$$

OVVERO TROVANDO LE 2 RADICI

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$$

.... QUINDI $x = \varphi(t)$ CON

$$\varphi(t) = \frac{-1+\sqrt{1+4t}}{2}$$

OPPURE

$$\varphi(t) = \frac{-1-\sqrt{1+4t}}{2}$$

CI PIACE QUESTO CAMBIO DI VARIABILI? NON TANTO, PERCHÉ

$$\boxed{dx = \varphi'(t)\,dt} = \ldots\ldots\ldots$$ ROBA COMPLICATA!!

LASCIAMO PERDERE! CI VUOLE QUALCOSA DI PIÙ TURBO.

$$\frac{1}{1+x+x^2}$$

OSSERVIAMO CHE IL DENOMINATORE È DI NUOVO UN POLINOMIO DI GRADO 2 CHE NON HA RADICI REALI

(CIOÈ $1+x+x^2 > 0$)

INFATTI

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

PROVIAMO A VEDERE SE POSSIAMO RICONDURCI ALL'ESERCIZIO PRECEDENTE:

$$1 + x + x^2 = \frac{3}{4} + \underbrace{\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + x^2}_{= \left(\frac{1}{2} + x\right)^2} = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2$$

OVVERO

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{\frac{3}{4} + \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}^2}$$

$\varphi(t)$

$\|$

SE ADESSO FACESSI IL CAMBIO $x+\frac{1}{2} = t$ OVVERO $x = t-\frac{1}{2}$

MI RICONDUCO ALL'ESERCIZIO PRECEDENTE!

FACCIAMOLO PER BENE

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}\,dx$$

$$\left(\begin{array}{l} x = t - \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array}\right) = \int \frac{1}{\frac{3}{4}+t^2}\,dt$$

V. ESERCIZIO PRECEDENTE $=$ CON $\alpha = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \operatorname{arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3/4}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \blacksquare$$

COSA HO IMPARATO? CHE

LA RICERCA DI UNA PRIMITIVA

DI UNA FUNZIONE DEL TIPO

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}$$ CON $c>0$ E $\Delta = b^2-4ac<0$

MI DEVE DARE COME RISULTATO UNA ARCO TANGENTE.

FATE X CASA: $\displaystyle\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\,dx$

CON $\boxed{c>0}$ E $\boxed{b^2-4ac<0}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SI RICALCOLI L'INTEGRALE

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

USANDO STAVOLTA UN CAMBIO DI VARIABILI.

SOL.

L'ABBIAMO GIÀ RISOLTO "PER PARTI", VEDIAMO UN ALTRO METODO.

QUAL È L'IDEA DEL CAMBIO DI VARIABILI?

CERCO UN CAMBIO

$$x = \varphi(t)$$

CON φ TALE CHE

$$1 - x^2 = 1 - \varphi(t)^2 = \text{"UN QUADRATO"}$$

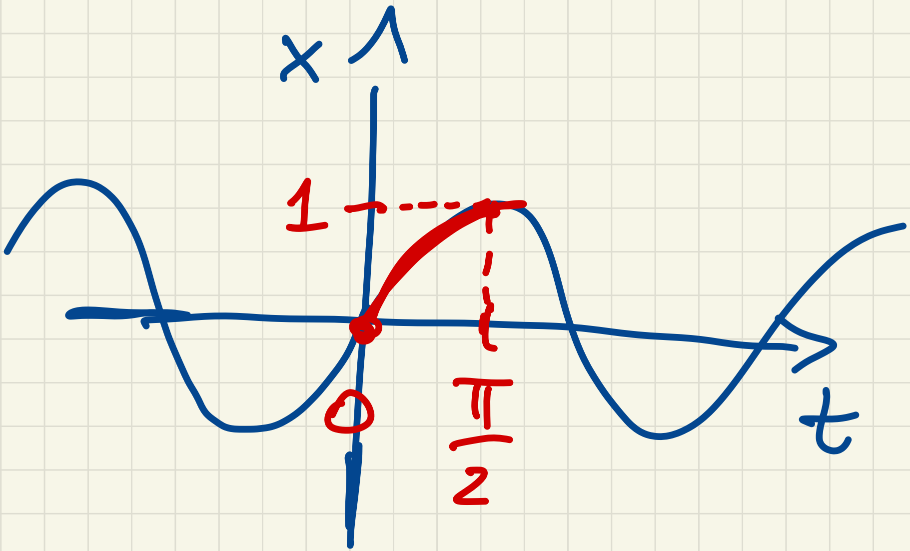
<u>RICORDA</u>: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

OVVERO $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

PROVIAMO DUNQUE CON

$$x = \sin t = \varphi(t)$$

DISCUTIAMO UN ATTIMO φ:



DEVO ~~COS~~ CONSIDERARE φ SU UN INTERVALLO IN CUI È

1. BIETTIVA
2. HA IMMAGINE $[0,1]$

$$x = \sin t = \varphi(t)$$

con $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0, 1]$

quindi

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t \, dt$$

MEMENTO

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t \, dt$$

$\cos t \geq 0$ su $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$$

GIÀ VISTO LEZIONE 22

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{\sin(\pi)}{4}} - (0+0) = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ TROVARE UNA PRIMITIVA DI

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

SOL.

OSSERVIAMO CHE

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

È APPARENTEMENTE MOLTO SIMILE A QUELLO DI PRIMA

$$x\sqrt{1-x^2} = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

È ALL'INCIRCA DELLA FORMA

$$g'(x)(g(x))^{\alpha}$$

CON $g(x) = 1-x^2$ E $\alpha = \frac{1}{2}$

ED OSSERVO CHE

$$\frac{d}{dx}\frac{(g(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} \underset{(D3)}{=} \frac{\cancel{\alpha+1}}{\cancel{\alpha+1}}\, g(x)^{\alpha}\cdot g'(x)$$

QUINDI POSSO FARE
IL CAMBIO

$$g(x) = t \quad \text{OVVERO} \quad 1-x^2 = t$$

DA CUI $\boxed{-2x\,dx = dt}$

QUINDI

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$1-x^2=t$
$-2x\,dx=dt$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{3}\,t^{3/2}$$

$$= -\frac{1}{3}\,t^{3/2} = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$t = 1-x^2$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SI TROVI UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

SOL.

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx$$ SEMBRA SIMILE

A $$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

VOGLIO PROVARE A FARE

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx$$

CON UN CAMBIO DI VARIABILI, "ISPIRANDOMI" AL CASO

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx .$$

PER QUEST'ULTIMO, AVEVO FATTO IL CAMBIO $x = \sin t$ CHE STAVOLTA NON SEMBRA UTILE

VORREI $x = \varphi(t)$

CON (1) $1 + \varphi(t)^2 =$ "UN QUADRATO"

E CON (2) $\varphi'(t)$ SIA

"NON TROPPO COMPLICATO"

(RICORDA: $dx = \varphi'(t)\,dt$)

..... BOH!!

LASCIAMOLO UN ATTIMO IN SOSPESO

ED OCCUPIAMOCI DI

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CONSIDERIAMO

LE FUNZIONI

$$\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

COSENO IPERBOLICO

E

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

SENO IPERBOLICO

STUDIARE QUESTE 2 FUNZIONI. INOLTRE DIMOSTRARE

CHE

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1} \quad (\mathrm{I})$$

PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

<u>SOL</u>.

PARTO OSSERVANDO CHE

cosh E sinh SONO FUNZIONI

DEFINITE SU TUTTO $\mathbb{R}$,

CONTINUE SU $\mathbb{R}$ (SOMME DI

FUNZIONI CONTINUE) E DERIVABILI

SU $\mathbb{R}$ (SOMME DI FUNZIONI DERIVABILI).

OSSERVO CHE

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$$

$$= \cosh x$$

$\Rightarrow$ COSENO IPERBOLICO È PARI

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2}$$

$$= - \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

OVVERO IL SENO IPERBOLICO

È DISPARI.

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + \overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{2}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}}{2}$$

$$= +\infty$$

SEGNO DELLE 2 FUNZIONI:

$$\cosh x \geq 0 \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 0$$

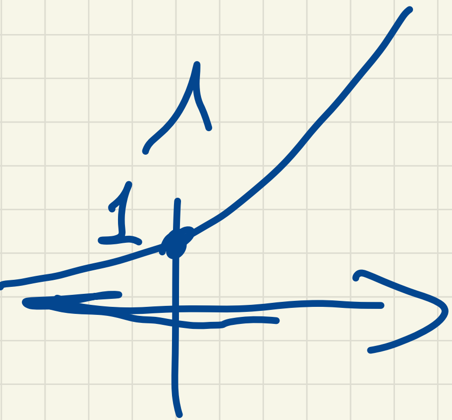
È VERA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

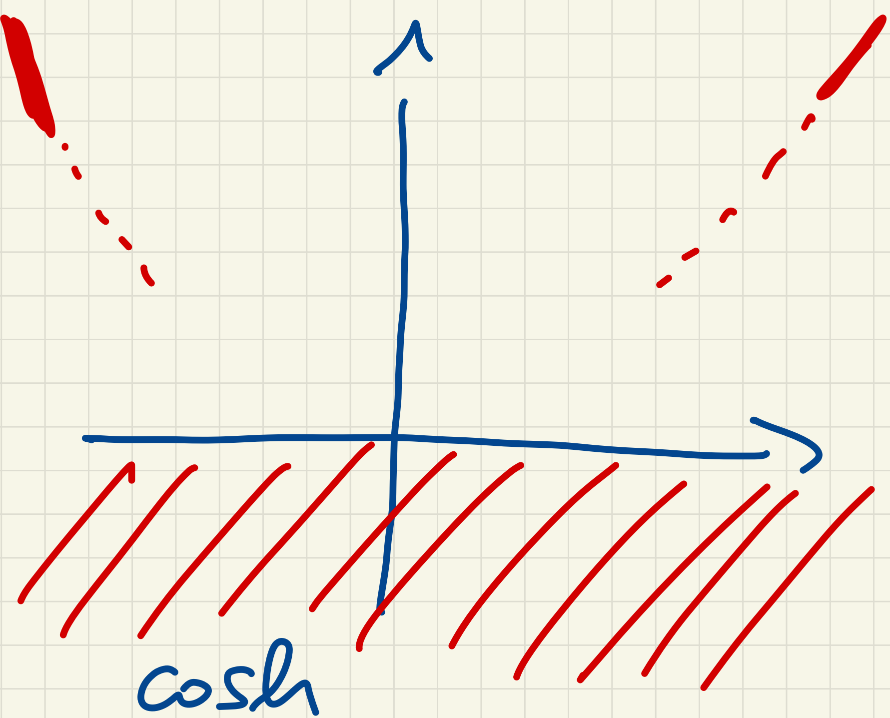
$$\sinh x \geq 0 \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq 0$$

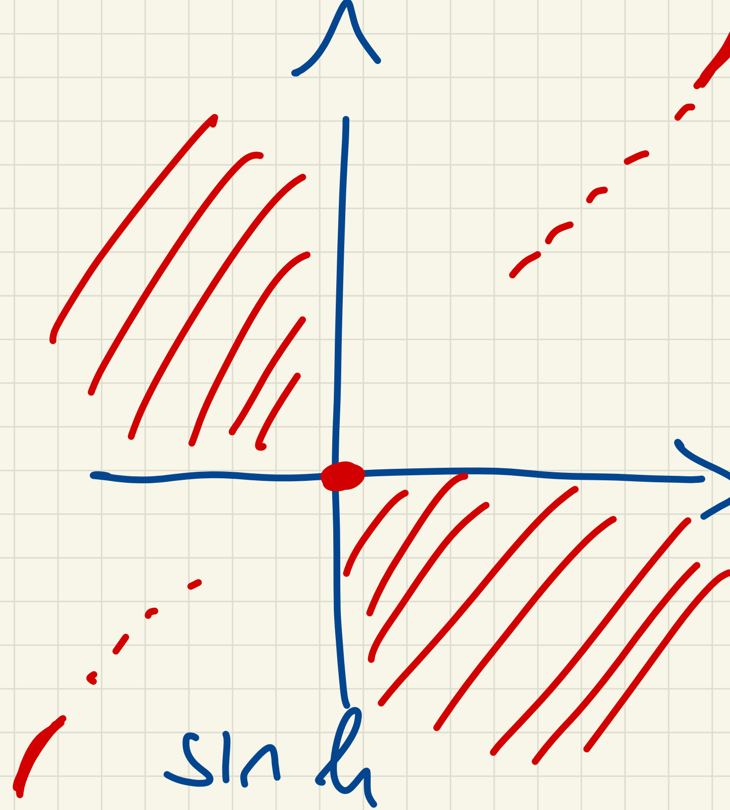
$$\iff e^x \geq e^{-x}$$

$$\iff e^{2x} \geq 1$$

$$\iff x \geq 0$$







MONOTONIA :

USIAMO IL TEST DI MONOTONIA

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}e^{x} + \frac{d}{dx}e^{-x}\right)$$

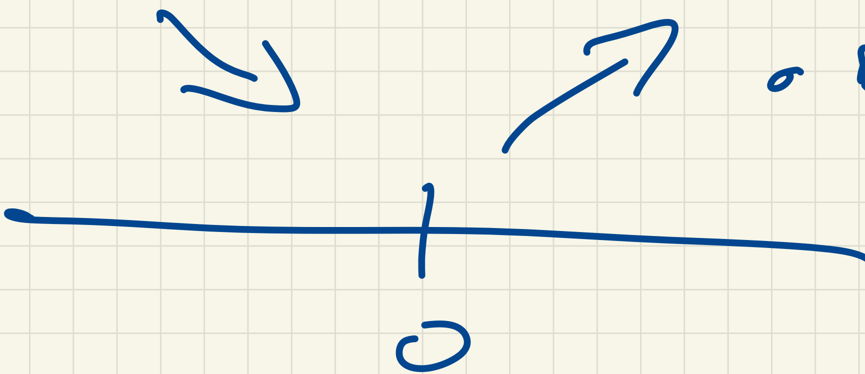
$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \sinh x$$

$$\geq 0 \iff x \geq 0$$

OVVERO

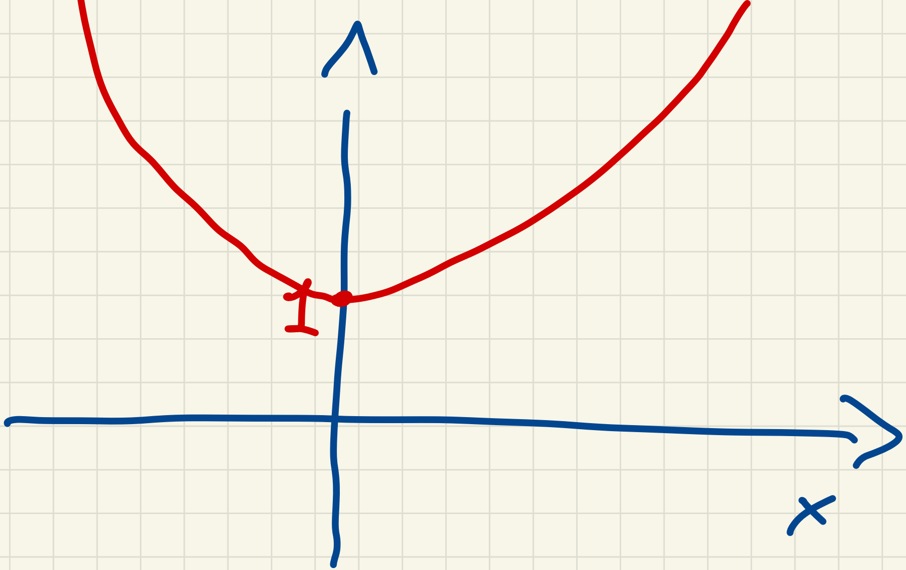
$\cosh(x)$ È

- CRESCENTE PER $x \geq 0$
- DECRESCENTE PER $x < 0$



QUINDI IN $x = 0$ C'È IL PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO, DA CUI

$$\min_{\mathbb{R}} \cosh(x) = \cosh(0) = 1$$



IL GRAFICO APPROSSIMATIVO DEL COSENO IPERBOLICO

OSSERVIAMO CHE $\cosh$ NON È INIETTIVO SU $\mathbb{R}$, LO DIVENTA SE LO RESTRINGIAMO AL DOMINIO $[0, +\infty)$

CHI È LA SUA IMMAGINE?

IN BASE AL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI, DAL FATTO CHE

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \cosh(x) = 1 \quad \text{E} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \cosh(x) = +\infty$$

ABBIAMO CHE L'IMMAGINE È

$$[1, +\infty)$$

IN PARTICOLARE,

$$\cosh : [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$$
$$x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

È BIETTIVA !

POSSIAMO QUINDI DEFINIRE LA SUA FUNZIONE INVERSA CHE SI CHIAMA ARGOMENTO DEL COSENO IPERBOLICO (argcosh)

DEFINITA

$$\operatorname{arg\,cosh} : [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$y \longmapsto \text{“L'UNICA SOLUZIONE } x \geq 0 \text{ DI } \cosh x = y\text{”}$$

ES.

$$\operatorname{arg\,cosh}(1) = \text{“L'UNICA SOLUZIONE } x \geq 0 \text{ DI } \cosh(x) = 1\text{”}$$

$$= 0$$

CI RESTA DA STUDIARE LA MONOTONIA DEL SENO IPERBOLICO:

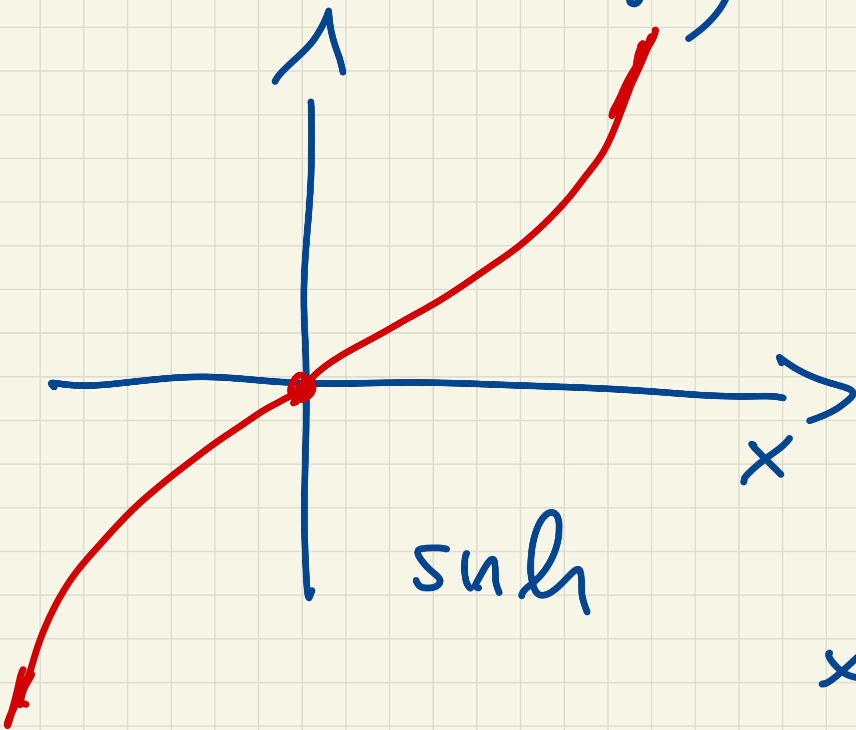
$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^x - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x \geq 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

OVVERO sinh È TUTTA
ST. CRESCENTE (QUINDI GIÀ
INIETTIVA!)



CHI È LA
SUA
IMMAGINE?

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \sinh x = -\infty$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sinh x = +\infty$$

PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI L'IMMAGINE È TUTTO $\mathbb{R}$.

IN ALTRE PAROLE

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

È BIETTIVA. RISULTA DEFINITA LA SUA FUNZIONE

INVERSA ARGOMENTO DEL SENO IPERBOLICO ($\operatorname{argsinh}$)

DATA DA

$$\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto x$$ "L'UNICA SOLUZIONE x DI $\sinh x = y$"

ES. $\operatorname{argsinh}(0) = 0$

- CI MANCA DA MOSTRARE LA

FORMULA (I)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

IN BASE ALLA DEFINIZIONE,
SI HA

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$

$$- \frac{e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1 \qquad \text{YES!!} \qquad \blacksquare$$

TORNIAMO ALLA PRIMITIVA
CHE NON SAPEVAMO FARE . . . ,

ESERCIZIO TROVARE UNA PRIMITIVA
DI

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

SOL.

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx$$

PROVIAMO A
FARE IL CAMBIO

$$x = \varphi(t) = \sinh t$$

RICORDANDOCI CHE

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

DA CUI

$$1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$$

INOLTRE

$$\varphi'(t)\,dt = (\sinh t)'\,dt$$

$$= \cosh t\,dt$$

ABBIAMO DUNQUE

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \;=\; \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt$$

$$\left(\begin{array}{l} x = \sinh t \\ dx = \cosh t\,dt \end{array}\right)$$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 t}\,\cosh t\,dt$$

$\cosh t \geq 1$
VISTO PRIMA

$$= \int \cosh t \cosh t\,dt$$

$$= \int \cosh^2 t \, dt = \dots ?$$

PER CALCOLARE QUEST'ULTIMO INTEGRALE, PROCEDO "PER PARTI"

$$\int \cosh^2 t \, dt = \int \underbrace{\cosh t}_{f'(x)} \underbrace{\cosh t}_{g(x)} \, dt$$

$$= \underbrace{\sinh t}_{f(x)} \underbrace{\cosh t}_{g(x)} - \int \underbrace{\sinh t}_{f(x)} \underbrace{\sinh t}_{g'(x)} \, dt$$

$$= \sinh t \cosh t - \int \sinh^2 t \, dt$$

$$= \sinh t \cosh t + \int (1 - \cosh^2 t) dt$$

$\cosh^2 t - \sinh^2 = 1$

$$= \sinh t \cosh t + t - \int \cosh^2 t \, dt$$

OVVERO

$$\int \cosh^2 t \, dt = \sinh t \cosh t + t - \int \cosh^2 t \, dt$$

DA CUI (INFINE!)

$$\int \cosh^2 t \, dt = \frac{\sinh t \cosh t + t}{2}$$

CONCLUDENDO, ABBIAMO DUNQUE

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \cosh^2 t \, dt$$

$x = \sinh t \iff \operatorname{arg\,sinh} x = t$

SI PUO' INVERTIRE PER $t \in \mathbb{R}$ (V. PRIMA)

$$= \frac{\sinh t \cosh t + t}{2} =$$

$$= \frac{x \cosh(\operatorname{argsinh} x)}{2} + \frac{\operatorname{argsinh} x}{2} \qquad \blacksquare$$