ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 24 –

LORENZO BRASCO

18 DICEMBRE 2020

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

TROVARE UNA PRIMITIVA DELLE FUNZIONI SEGUENTI:

1. $f(x) = \sqrt{\alpha + x^2}$ con $\alpha > 0$
2. $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ($|x| \geq 1$ ovvero $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$)
4. $f(x) = \sqrt{x^2 - \alpha}$ con $\alpha > 0$

SUGGERIMENTI

- USARE CAMBI DI VARIABILE "IPERBOLICI"
- PER $f(x) = \sqrt{\alpha + x^2}$

CERCATE DI RICONDURVI A

$$\sqrt{1+x^2} \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{\alpha+x^2} = \sqrt{\alpha}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

- PER $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

COMPLETIAMO IL QUADRATO

$$1+x+x^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}x + x^2\right)$$

$$= \frac{3}{4} + \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right) = t \qquad = \frac{3}{4} + t^2$$

VI SIETE RICONDOTTI

AL CASO PRECEDENTE

③ $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

RICORDATE CHE

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

OVVERO

$$\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t \quad \ldots\ldots$$

QUINDI SE SI PONE

$$x = \cosh t \quad \ldots\ldots$$ (CONTINUARE)

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ ① DIMOSTRARE CHE

$$\operatorname{argsinh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

② DEDURNE CHE

$$\frac{d}{dy} \operatorname{argsinh} y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(RICORDA $\frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$)

SOL.

1 PER DEFINIZIONE $\operatorname{arg\,sinh}$ È LA FUNZIONE INVERSA DEL $\sinh$

QUINDI

$\operatorname{arg\,sinh} y =$ "L'UNICA SOLUZIONE $x \in \mathbb{R}$ DI $\sinh x = y$"

PER COMPLETARE QUESTO PUNTO, PROVIAMO A RISOLVERE ESPLICITAMENTE L'EQUAZIONE

$$\sinh x = y$$

$$\sinh x = y \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$\iff e^x - e^{-x} = 2y$$

$$\iff e^x - \frac{1}{e^x} = 2y$$

$$\iff e^{2x} - 1 = 2ye^x$$

(OSSERVA CHE $e^x \neq 0$)

$$\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

RICORDA

sinh È INIETTIVO, QUINDI DOBBIAMO TROVARE UN'UNICA SOLUZIONE

PONIAMO $T = e^x$

L'EQUAZIONE DIVENTA

$$T^2 - 2yT - 1 = 0$$

LE CUI RADICI SONO

$$T_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

OVVERO

$$\underbrace{0 <}_{\text{PER DEFINIZIONE!}} e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

2 SOLUZIONI!! ??

OSSERVO CHE

$$y-\sqrt{y^2+1} < y-\sqrt{y^2} = y-|y| \leq 0$$

QUINDI QUESTA SOLUZIONE <u>VA SCARTATA</u>

IN DEFINITIVA

$$\sinh x = y \iff e^x = y+\sqrt{y^2+1}$$

$$\iff x = \log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

QUESTO DIMOSTRA

$$\operatorname{argsinh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

2 LA DERIVATA DI argsinh POSSO CALCOLARLA:

- USANDO LA REGOLA (D4) ("DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA")
- DIRETTAMENTE DAL PUNTO 1

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arsinh} y \overset{(1)}{=} \frac{d}{dy} \overbrace{\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)}^{f(g(y))}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}}_{f'(g(y))} \underbrace{\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y^2+1}} \cdot \cancel{2}y\right)}_{g'(y)}$$

$$= \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{y+\sqrt{1+y^2}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{y^2+1}+y}}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

COME VOLEVAMO!

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

1. DIMOSTRARE CHE
$$\operatorname{arccosh} y = \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$
PER $y \in [1, +\infty)$

2. DEDURNE CHE
$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccosh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

VI.5

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

IN QUESTA SEZIONE, VOGLIAMO OCCUPARCI DI TROVARE PRIMITIVE DI FUNZIONI RAZIONALI OVVERO DI FUNZIONI DEL TIPO

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

CON P, Q POLINOMI NELLA VARIABILE REALE x

OBIETTIVO

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

BUONE NOTIZIE PER QUESTO TIPO DI INTEGRALI ESISTE UN ALGORITMO

CATTIVE NOTIZIE L'ALGORITMO È UN PO' COMPLICATO DA DESCRIVERE IN GENERALE

QUELLO CHE FAREMO È:

- VEDERE I PRIMI PASSI DI QUESTO ALGORITMO
- VEDERE UN PO' DI CASI PARTICOLARI, CHE SIANO SUFFICIENTEMENTE "ISTRUTTIVI"

CI SERVIRANNO INNANZITUTTO UN PO' DI "MATTONI FONDAMENTALI" CHE SAPPIAMO INTEGRARE!

(I) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$

DEFINITA SU $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

VERIFICA:

- PER $x>0$, $\log|x| = \log x$

E QUINDI $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$

- PER $x<0$, $\log|x| = \log(-x)$

E QUINDI $\frac{d}{dx}\log(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

II $\displaystyle\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx \overset{\text{}}{=} \int \frac{1}{t}\,dt$

$x-\alpha=t$

$dx=dt$

(CON $\alpha \in \mathbb{R}$ ASSEGNATO)

$\overset{\mathrm{I}}{=} \log|t|$

$= \log|x-\alpha|$

III $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

IV $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt$

$x-\alpha=t$

$dx=dt$

(con $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$= -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-\alpha}$$

III

V $\displaystyle\int \frac{1}{x^k}\,dx = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{(k-1)}\frac{1}{x^{k-1}}$

con $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

VI $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \int \frac{1}{t^k}\,dt$

$x-\alpha=t$

$dx=dt$

(CON $\alpha\in\mathbb{R}$, $k\geq 2$ NATURALE)

$$= -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{t^{k-1}}$$

V

$$= -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$$

VII

$$\int \frac{1}{\alpha + x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

(CON $\alpha > 0$)

(V. LEZIONE 23)

(<u>OSSERVA</u>: IN QUESTO CASO, IL POLINOMIO A DENOMINATORE $q(x) = x^2 + \alpha$ <u>NON</u> HA RADICI REALI)

VIII $\displaystyle\int \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\frac{f'(x)}{f(x)}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$$

$1+x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\log|t|$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

- I PRIMI PASSI DELL'ALGORITMO

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

CON
- P POLINOMIO DI GRADO n
- Q POLINOMIO DI GRADO m

PASSO 1 : "CONTROLLO DEL GRADO"

CONTROLLARE SE $n < m$

- SE SÌ, ANDARE AL PROSSIMO PASSO

• SE <u>NON</u>, È ESEGUIRE LA DIVISIONE FRA POLINOMI

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

IN MODO DA SCRIVERE

$$P(x) = \underbrace{h(x)}_{\text{POLINOMIO}} Q(x) + \underbrace{R(x)}_{\text{POLINOMIO RESTO}}$$

CON GRADO DI $R < n$

IN TAL MODO SI AVRÀ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{h(x)Q(x)+R(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$= \underbrace{\int h(x)\,dx}_{\text{UN POLINOMIO DA INTEGRARE}} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx}_{\text{SIAMO NELLA SITUAZIONE}}$$

OK!

SIAMO NELLA SITUAZIONE

"GRADO DI R" < "GRADO DI Q"

ED ANDIAMO AL PASSO 2

PASSO 2 "ZERI DEL DENOMINATORE"

SI CALCOLANO GLI ZERI DEL POLINOMIO $Q(x)$ AL DENOMINATORE.

UNA VOLTA TROVATI GLI ZERI, SI FATTORIZZA Q IN POLINOMI IRRIDUCIBILI.

$\boxed{\text{ES.}}$ (1) $Q(x) = x^2 - 3x + 2$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

(ZERI SEMPLICI)

① SI FATTORIZZA COME

$$q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

POLINOMI IRRIDUCIBILI

② $q(x) = x^3 - 2x^2 + x$

SI VEDE CHE

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1)$$
$$= x(x-1)^2$$

$x = 0$ E $x = 1$ SONO GLI ZERI
(SEMPLICE) (DOPPIO)

E x, $(x-1)^2$

POLINOMI IRRIDUCIBILI

③ $f(x) = x^3 + x^2 + x$

$= x(x^2 + x + 1)$ POLINOMI IRRIDUCIBILI

OSSERVIAMO CHE $x^2 + x + 1 \neq 0$

INFATTI $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

E $x=0$ È L'UNICO ZERO (SEMPLICE).

PASSO 3: "DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI"

PER ILLUSTRARE QUESTO PASSO, FACCIAMO DIRETTAMENTE DEGLI ESEMPI

ESERCIZIO TROVARE UNA PRIMITIVA DI

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$$

SOL.

FUNZIONE RAZIONALE $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

"CONTROLLO DEL GRADO":

$P(x) = x^3+2$ HA GRADO 3

$Q(x) = x^2-1$ HA GRADO 2

PRIMA AL PASSO 2, DEVO ESEGUIRE UNA DIVISIONE TRA POLINOMI:

$$\begin{array}{rcccc|l} & x^3 & & & +2 & x^2-1 \\ \cline{6-6} & x^3 & & -x & & x \\ \cline{2-5} \text{SOTTRAGGO} & 0 & & \underbrace{x \quad +2}_{\text{RESTO}} & & \end{array}$$

RISULTATO DI $\frac{x^3}{x^2}$

ABBIAMO GIÀ FATTO!

ABBIAMO QUINDI OTTENUTO:

$$x^3+2 = x(x^2-1) + \underbrace{x+2}_{\text{RESTO}}$$

DA CUI

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1} = \frac{x\cancel{(x^2-1)}}{\cancel{x^2-1}} + \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$= x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

← GRADO 1

← GRADO 2

QUINDI

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$$

E SULL'ULTIMO INTEGRALE, POSSO PASSARE AL PASSO 2.

$$\varphi(x) = x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

POLINOMI IRRIDUCIBILI

QUINDI Q HA GRADO 2 ED HA 2 ZERI SEMPLICI.

OPERIAMO ADESSO LA "DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI": TROVARE $A, B \in \mathbb{R}$ T.C.

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

SUPPONIAMO PER UN ATTIMO DI SAPERE CHE ESISTONO A, B

CHE FANNO QUESTO SERVIZIO,
AVREI FINITO!

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx$$

$$= A\log|x-1| + B\log|x+1|$$

CI MANCA DA TROVARE A, B,
COME SI FA?

$$\frac{x+2}{x^2-1} \stackrel{?}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow x+2 = (A+B)x + (A-B)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=2 \end{cases}$$

PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI

QUESTO SISTEMA HA SOLUZIONE UNICA

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2B=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1-B=\frac{3}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{A=\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{B=-\frac{1}{2}}$$

FANNO IL SERVIZIO DI "DECOMPOSIZIONE IN TRATTI SEMPLICI" OVVERO

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$$

CONCLUSIONE

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ TROVARE UNA PRIMITIVA DI $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2}$

SOL.

FUNZIONE RAZIONALE, CON PASSO 1 OK

VEDIAMO GLI ZERI DEL DENOMINATORE:

IRRIDUCIBILI

$$Q(x) = x^3+x^2 = x^2(x+1)$$

Q HA 2 ZERI :

$x=0$ DOPPIO

$x=-1$ SEMPLICE

PROVIAMO A FARE LA "DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI" .... SI FA COME PRIMA? PROVIAMO A FARE COME PRIMA.... CERCO $A, B \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+1}$$

CE LA FACCIO ?

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A(x+1)+Bx^2}{x^3+x^2}$$

$$\Longleftrightarrow 1 = Bx^2 + Ax + A$$

$$\iff \begin{cases} B = 0 \\ A = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE!

ARGHH!!!

E QUINDI? LA DECOMPOSIZIONE IN QUESTO CASO SI FA COSÌ:

CERCO 3 COEFFICIENTI A, B, C T.C.

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{\frac{1}{x^3+x^2}} = \frac{A(x+1)x + B(x+1) + Cx^2}{\cancel{x^2(x+1)}}$$

$$\Longleftrightarrow 1 = (C+A)x^2 + (B+A)x + B$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} C+A = 0 \\ B+A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

IN ALTRE PAROLE, LA DECOMPOSIZIONE VA A BUON FINE!

$$\frac{1}{x^3+x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$ DA CUI

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{dx}{1+x}$$

$$= -\log|x| - \frac{1}{x} + \log|x+1| \qquad \blacksquare$$

ESERCIZIO CALCOLARE UNA PRIMITIVA DI

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3+x}$$

SOL.

OK PER IL PASSO 1

VEDIAMO GLI ZERI DEL DENOMINATORE:

$$\varphi(x) = x\underbrace{(x^2+1)}_{\text{NON HA ZERI}}$$

1 SOLO ZERO SEMPLICE / COMPARE UN

POLINOMIO IRRIDUCIBILE DI GRADO 2, PRIVO DI ZERI.

COME SI FA LA DECOMPOSIZIONE STAVOLTA? DI NUOVO, SE PROVASSI CON 2 SOLI COEFFICIENTI A, B

$$\frac{x-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+1}$$

NON CE LA FAREI (PROVATECI!)

PROVO COSÌ: CERCO A, B, C TALI CHE

$$\frac{x-1}{x^2+x} \overset{?}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^3+x} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \end{cases} \qquad A=-1$$

YES! CE LA FACCIO, CON

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1$$

ABBIAMO ALLORA

$$\frac{x-1}{x^3+x} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

TROVIAMO LA PRIMITIVA:

$$\int \frac{x-1}{x^3+x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\log|x| + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\log|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

$$+ \arctan x$$

$\blacksquare$