Analisi Matematica A
– *Lezione 5* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 14 Ottobre 2020

II.3 Composizione di funzioni

In certi casi, quando si hanno a disposizione due funzioni, possiamo "comporle" in modo da crearne una terza

Definizione

Siano X, Y e Z, W quattro insiemi non vuoti tali che

$$\boxed{Y \subseteq Z}$$

Siano $\quad f : X \to Y \quad$ e $\quad g : Z \to W \quad$ due funzioni.

Si chiama **composizione di f con g** la nuova funzione

$$g \circ f : X \to W$$

definita da

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \qquad \text{per ogni } x \in X.$$

Per dare senso all'espressione

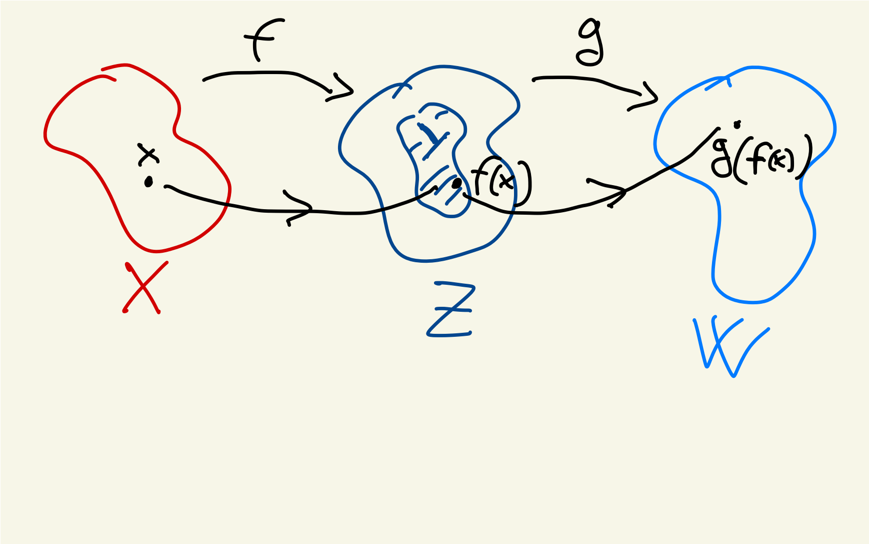
$$g(f(x))$$

$\underline{\text{è necessario}}$ che $f(x)$ appartenga al dominio di g...

...ovvero che il codominio Y di f sia contenuto nel dominio Z di g

Questo spiega la **richiesta cruciale**

$$\boxed{Y \subseteq Z}$$



f
g
x
f(x)
Y
g(f(x))
X
Z
W

Esempio

Si prendano le funzioni

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Vediamo se possiamo considerare le composizioni

$$g \circ f \qquad \text{e/o} \qquad f \circ g.$$

Nel caso si possa, calcoliamole

- Cominciamo osservando che

$$\text{codominio di } f = \mathbb{R} = \text{dominio di } g$$

quindi la condizione per poter definire $g \circ f$ **è garantita**

In base alla definizione di funzione composta, si ha

$$g \circ f : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

definita da

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Ora per definizione si ha

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{da cui quindi} \qquad g(f(x)) = \frac{1}{1+(f(x))^2}$$

Inoltre $f(x) = x + 1$, quindi in conclusione

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{1+(x+1)^2}$$

• Osserviamo adesso che

$$\text{codominio di } g = [0,1] \subseteq \mathbb{R} = \text{dominio di } f$$

quindi anche la condizione per poter definire $f \circ g$ **è garantita**!

In base alla definizione di funzione composta, si ha

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definita da

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = \frac{1}{1+x^2} + 1, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Questo esempio dovrebbe anche chiarire che, in generale, l'**operazione di composizione non è commutativa**.

Definizione

Siano X, Y due insiemi non vuoti e sia

$$\boxed{f : X \to Y}$$

una funzione <u>biettiva</u>

La sua **funzione inversa**

$$\boxed{f^{-1} : Y \to X}$$

è definita come

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } x \in X \text{ dell'equazione } f(x) = y\text{''} \end{array}$$

Attenzione!

Il dominio della funzione inversa f^{-1} coincide col codominio di f

Il codominio della funzione inversa f^{-1} coincide col dominio di f

Si osservi che grazie alla biettività, la definizione

$$f^{-1}(y) = \text{“l'unica soluzione } x \in X \text{ dell'equazione } f(x) = y\text{''}$$

è **ben posta**, ovvero ha perfettamente senso

Infatti, da questa proprietà abbiamo che per ogni $y \in Y$

- esiste una (per **suriettività**)...
- ...ed una sola (per **iniettività**) $x \in X$ tale che $f(x) = y$

Importante

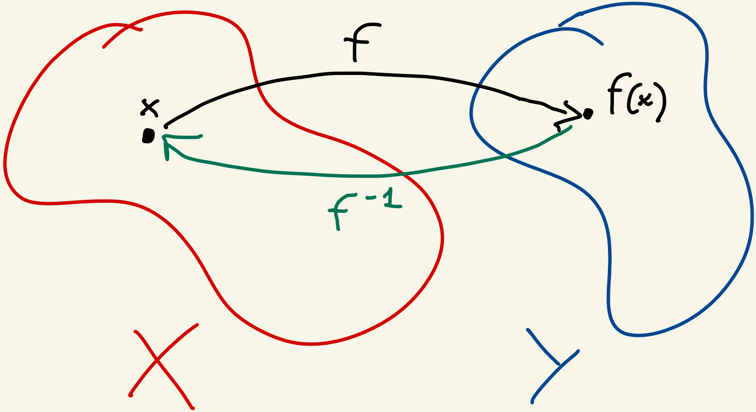
Si ha direttamente dalla costruzione

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \text{ per ogni } x \in X, \qquad f \circ f^{-1}(y) = y, \text{ per ogni } y \in Y.$$

ovvero le due composizioni

$$f^{-1} \circ f : X \to X \qquad \text{e} \qquad f \circ f^{-1} : Y \to Y$$

sono l'**identità**


f
x
f(x)
f⁻¹
X
Y

Esempio (Elevamento al quadrato...ancora!)

Abbiamo già visto che la funzione

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

è biettiva

Avevamo definito la funzione "radice quadrata" $\sqrt{y}$ come

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & y & \mapsto & \text{" l'unica soluzione } x \geq 0 \text{ di } x^2 = y\,\text{"} \end{array}$$

In base a quanto appena detto abbiamo che $g = f^{-1}$, ovvero g è la funzione inversa di f

Come è fatto il grafico di $y \mapsto \sqrt{y}$? Ce l'abbiamo già in realtà!

Basta solo ricordarsi che adesso la variabile libera è y, quindi il dominio della funzione inversa si legge sull'asse verticale

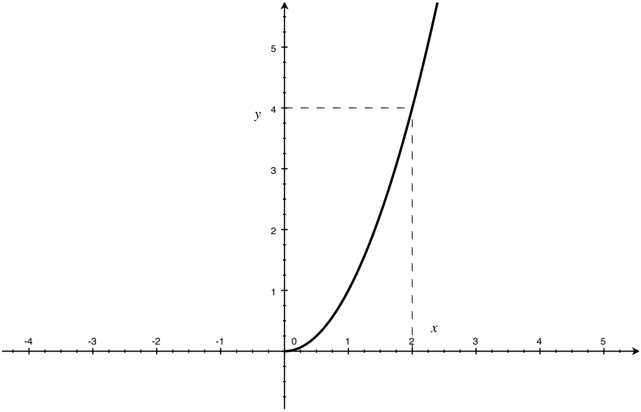


Figura: Se lo guardo così, questo è il grafico di $x \mapsto x^2$....

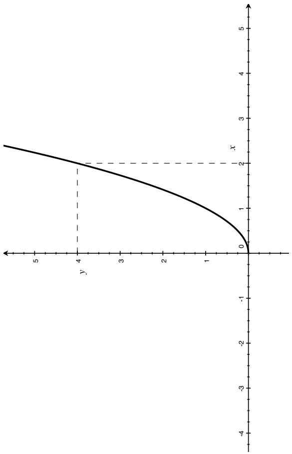


Figura: ...ma se ruoto il foglio di 90 gradi in senso antiorario, questo è il grafico di $y \mapsto \sqrt{y}$

"Prof! L'asse orizzontale però è orientato al contrario! Che razza di grafico è?!"

Avete ragione! Per sistemare l'orientazione dell'asse orizzontale, ci basta fare una riflessione rispetto all'asse verticale

Notate bene

Questa procedura che vi sto descrivendo, è la procedura generale per costruire il grafico di f^{-1} a partire da quello di f

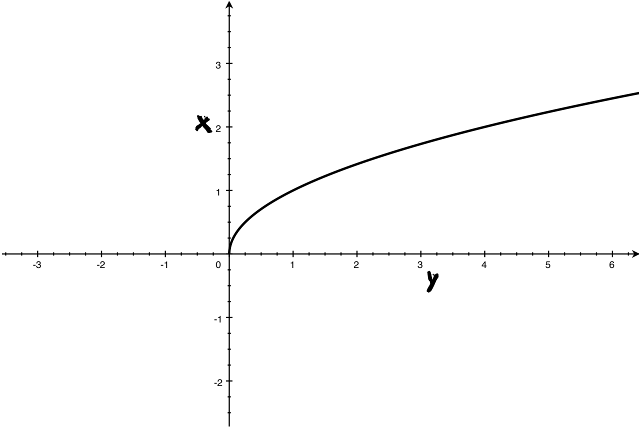


Figura: ...ecco infine il grafico di $y \mapsto \sqrt{y}$

Esercizio (per casa)

Dimostrare che la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & (-\infty, 0] & \rightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

è biettiva e costruire la sua funzione inversa

Esercizio

Dire se la funzione seguente

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione

La funzione è iniettiva, infatti per ogni $y \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$f(n) = y \qquad \text{ovvero} \qquad n + 1 = y,$$

ammette al più una soluzione $n \in \mathbb{N}$, data da $n = y - 1$ (tale soluzione sarà ammissibile solo $y \geq 1$). Si osservi invece che f non è suriettiva, dal momento che l'equazione

$$f(n) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad n + 1 = 0,$$

non ammette soluzioni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio

Dire se la funzione seguente

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione

- La funzione sembra la stessa dell'esercizio precedente...
- ...ma sono cambiati dominio e codominio!
- adesso, per ogni $y \in \mathbb{Z}$, l'equazione

  $$g(n) = y \qquad \text{ovvero} \qquad n+1 = y,$$

  ammette **una ed una sola** soluzione $n \in \mathbb{Z}$, data da

  $$n = y - 1 \qquad \text{(che è un numero intero)}$$

- g è quindi biettiva stavolta e possiamo definire la sua inversa, tramite la formula generale

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & y & \mapsto & \text{“l'unica soluzione } n \in \mathbb{Z} \text{ dell'equazione } g(n) = y\text{''} \end{array}$$

- in base alla discussione precedente, abbiamo dunque

$$g^{-1}(y) = y - 1 \qquad \text{per ogni } y \in \mathbb{Z}$$

- **verifica**

$$g^{-1} \circ g(n) = g^{-1}(g(n)) = g(n) - 1 = (n+1) - 1 = n$$

ed anche

$$g \circ g^{-1}(y) = g(g^{-1}(y)) = g^{-1}(y) + 1 = (y-1) + 1 = y$$

Esercizio

Dire se la funzione seguente

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione

- Sia $y \in \mathbb{R}$, cerchiamo tutte le soluzioni $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dell'equazione
$$\frac{x+1}{x-2} = h(x) = y$$
- risolvendo questa equazione rispetto all'incognita x, si ha (si ricordi che $x \neq 2$)

$$\frac{x+1}{x-2} = y \quad \Longleftrightarrow \quad x+1 = y\,(x-2) \quad \Longleftrightarrow \quad (y-1)\,x = 2\,y+1$$

- osserviamo adesso che:

    1. se $\boxed{y = 1}$, l'equazione precedente si riduce a

    $$0 = 3,$$

    ovvero per $y = 1$ **non ci sono soluzioni**;

    2. se invece $\boxed{y \neq 1}$, allora dall'equazione precedente otteniamo

    $$x = \frac{2\,y + 1}{y - 1},$$

    ovvero per $y \neq 1$, **esiste una soluzione** $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e tale soluzione **è unica**.

- la discussione precedente dimostra che

$$\forall y \in \mathbb{R},\ h(x) = y \text{ ammette al più una soluzione } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

  e quindi h **è iniettiva**
- tuttavia h **non è suriettiva** visto che per $y = 1$ l'equazione

$$1 = h(x)$$

  non ammette soluzioni.

Osservazione

Riprendendo la discussione precedente, si vede facilmente che la funzione seguente (fate attenzione al codominio! **è cambiato**)

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

è biettiva. Infatti abbiamo tolto dal codominio 1, ovvero l'unico punto che non era nell'immagine di h, di modo che adesso h è suriettiva

Inoltre, la sua funzione inversa è data da

$$\begin{array}{rccc} h^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ & y & \mapsto & \dfrac{2\,y+1}{y-1} \end{array}$$

Sapreste dire perché?

Indichiamo con $\mathbb{R}^2$ il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Esercizio

Dire se la funzione seguente

$$\begin{array}{rccl} k: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, x_1 - x_2) \end{array}$$

è iniettiva e/o suriettiva. Nel caso sia biettiva, trovare l'espressione della funzione inversa.

Soluzione

- L'esercizio sembra molto più complicato rispetto a prima...
- ...in realtà è del tutto analogo, basta affidarci alle definizioni
- le y nel codominio adesso sono coppie di punti (perché il codominio è $\mathbb{R}^2$)
- le x nel dominio sono coppie di punti (perché il dominio è $\mathbb{R}^2$)

- quindi, in base alla definizione si iniettiva e suriettiva, dobbiamo rispondere alla domanda...
- ...dato $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, quante soluzioni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ha l'equazione
$$(y_1, y_2) = k(x_1, x_2)?$$
- in altre parole, **assegnato** $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, dobbiamo risolvere
$$(y_1, y_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2) \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 & = & y_1 \\ x_1 - x_2 & = & y_2 \end{cases}$$
- l'ultimo è un **sistema lineare**, di 2 equazioni e 2 incognite (x_1 e x_2)

- il nostro sistema

$$\begin{cases} (E_1) & x_1 + x_2 & = & y_1 \\ (E_2) & x_1 - x_2 & = & y_2 \end{cases}$$

- ...è equivalente a quello in cui si rimpiazza la seconda equazione (E_2) con $(E_1) - (E_2)$
- ...ovvero è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & y_1 \\ 2\,x_2 & = & y_1 - y_2 \end{cases}$$

- dalla seconda equazione troviamo

$$x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

- sostituendo nella prima, abbiamo

$$x_1 + \frac{y_1 - y_2}{2} = y_1$$

- ovvero

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- in conclusione, abbiamo che per ogni $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esiste **una ed una sola soluzione**

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$$

- tornando alla domanda iniziale, abbiamo che

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ l'equazione } k(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

ammette **una ed una sola** soluzione $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

- questo dimostra che k **è biettiva**!
- esiste quindi la funzione inversa, che sarà definita da

$$\begin{array}{rccc} k^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (y_1, y_2) & \mapsto & \begin{array}{c} \text{“l'unica soluzione } (x_1, x_2) \text{ di} \\ k(x_1, x_2) = (y_1, y_2)\text{''} \end{array} \end{array}$$

ovvero

$$k^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$$

II.4 Funzioni reali di una variabile reale

Nel corso di Analisi Matematica A, lavoreremo sempre con **funzioni reali di una variabile reale**, ovvero con funzioni del tipo

$$f : X \to Y$$

dove $X, Y \subseteq \mathbb{R}$

Un caso particolare

Quando il dominio di f coincide con $\mathbb{N}$ o con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, la funzione corrispondente verrà anche chiamata **successione reale**

Studieremo in dettaglio le successioni reali nel *Capitolo III*

Memento

Come abbiamo già osservato nella *Lezione 4*, per una funzione reale di variabile reale il suo **grafico**

$$\mathrm{Graph}(f) = \Big\{(x, y) \in X \times Y \,:\, y = f(x)\Big\}$$

è per costruzione un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ovvero il grafico di una funzione reale di variabile reale può essere rappresentato nel piano cartesiano bidimensionale

Nota bene

Ad *Analisi Matematica B* studieremo più in generale funzioni

$$f : X \to Y$$

con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Per queste funzioni il **grafico** sarà per definizione un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ e potrà quindi essere rappresentato graficamente **solo** quando $n = 2$

Uno degli obiettivi di questa parte A del corso, è studiare una funzione reale di variabile reale $f : X \to Y$ ed arrivare a tracciarne un grafico approssimato, **quanto più preciso possibile**

Cominciamo a vedere alcune "operazioni elementari sul grafico di una funzione" che ci permetteranno, una volta noto il grafico di

$$x \mapsto f(x)$$

di tracciare quello delle funzioni (α parametro reale)

$$x \mapsto -f(x) \qquad x \mapsto f(x+\alpha) \qquad x \mapsto \alpha\, f(x)$$

$$x \mapsto f(x)+\alpha \qquad x \mapsto f(\alpha\, x) \qquad x \mapsto |f(x)|$$

La conoscenza di queste operazioni potrà farci guadagnare del tempo prezioso

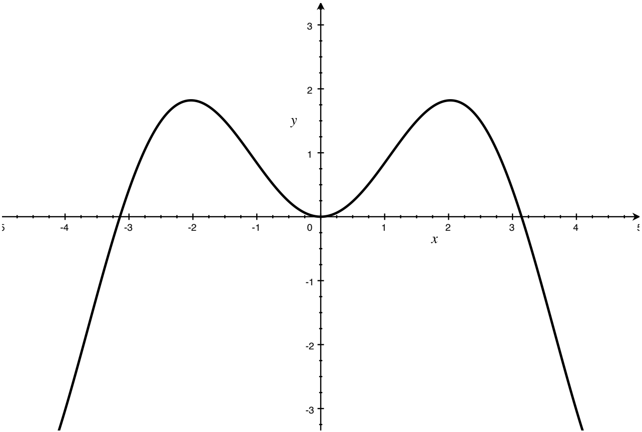


Figura: Supponiamo che questo sia il grafico della funzione di partenza $x \mapsto f(x)$...

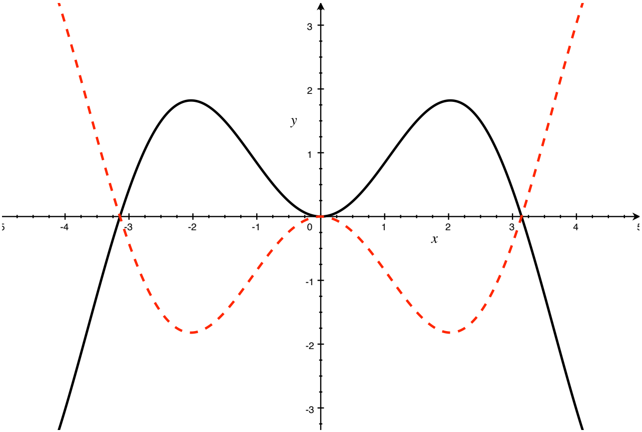


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto -f(x)$. Si osservi che se $f(x) \geq 0$, allora $-f(x) \leq 0$. L'effetto "geometrico" finale è che si riflette il grafico di f rispetto all'asse delle x

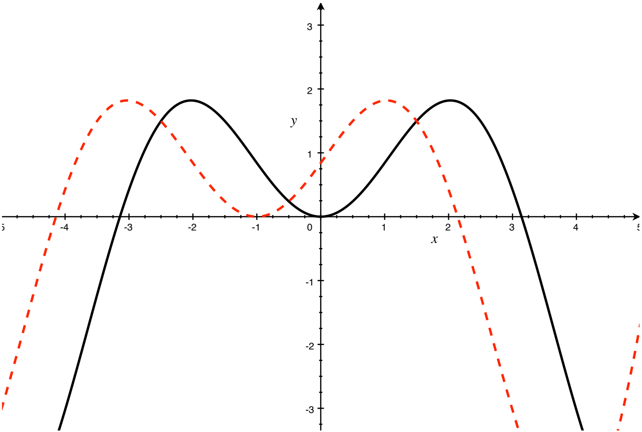


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto f(x+1)$. Si osservi che se $f(0) = 0$ (come in figura), allora $f(x+1)$ si annullerà per $x + 1 = 0$ ovvero per $x = -1$. L'effetto "geometrico" finale è che si trasla il grafico di f **verso sinistra** di una unità di lunghezza (*perché una unità?* Perché c'è $+1$, se invece c'era $+3$ o $+\sqrt{2}$....)

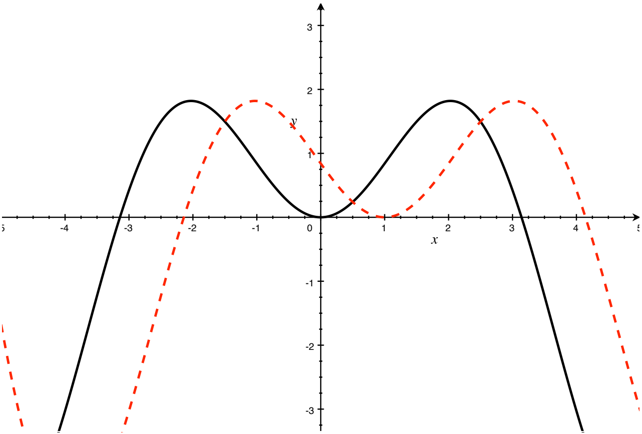


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto f(x-1)$. Si osservi che se $f(0) = 0$ (come in figura), allora $f(x-1)$ si annullerà per $x - 1 = 0$ ovvero per $x = 1$. L'effetto "geometrico" finale è che si trasla il grafico di f **verso destra** di una unità di lunghezza

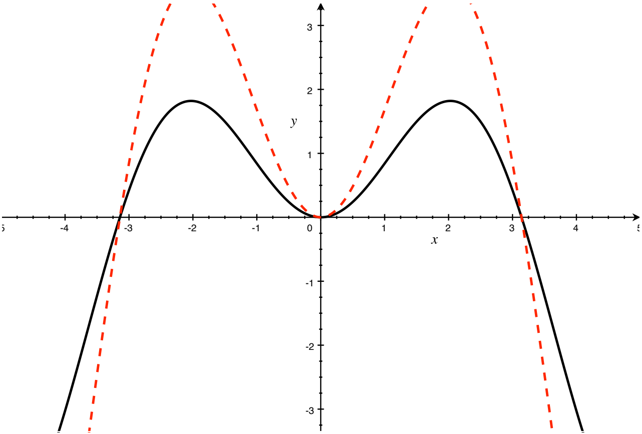


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto 2\,f(x)$. Si osservi che se $f(0) = 0$ (come in figura), allora $2\,f(0) = 0$. Tutti i valori non nulli invece, vengono raddoppiati (tenendo conto del segno!). L'effetto "geometrico" finale è che si "stira" verticalmente il grafico di f

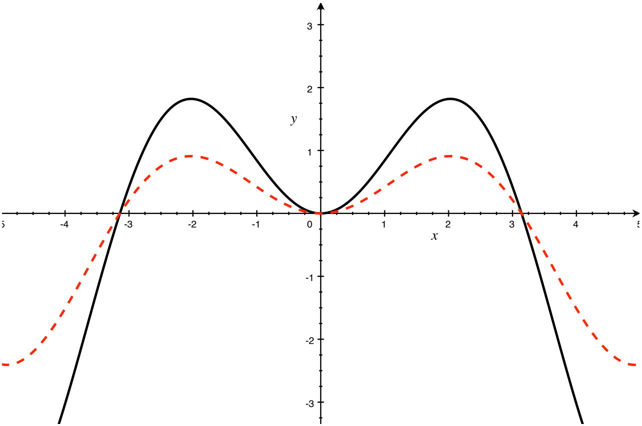


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto \frac{1}{2} f(x)$. Si osservi che se $f(0) = 0$ (come in figura), allora $\frac{1}{2} f(0) = 0$. Tutti i valori non nulli invece, vengono dimezzati (tenendo conto del segno!). L'effetto "geometrico" finale è che si "comprime" verticalmente il grafico di f

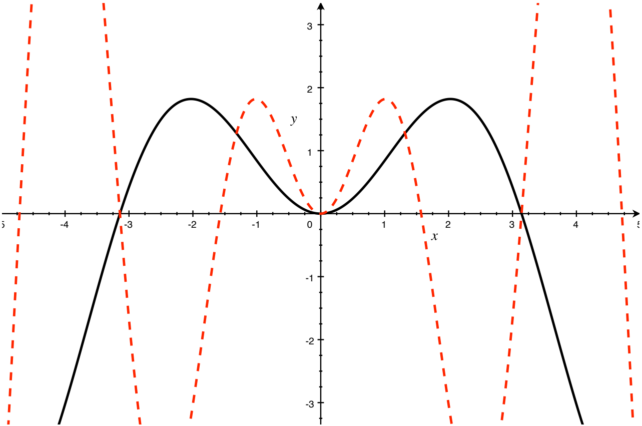


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto f(2\,x)$. Si osservi che se $f(2) = 2$ (come in figura), allora $f(2\,x)$ assume il valore 2 quando $2\,x = 2$, ovvero quando $x = 1$. L'effetto "geometrico" finale è che si "comprime" orizzontalmente il grafico di f

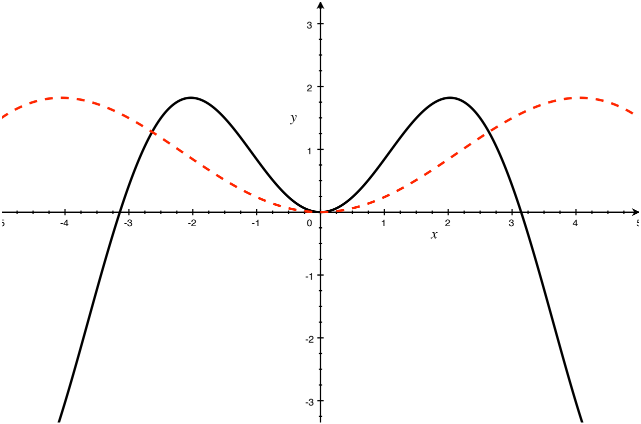


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto f(x/2)$. Si osservi che se $f(2) = 2$ (come in figura), allora $f(x/2)$ assume il valore 2 quando $x/2 = 2$, ovvero quando $x = 4$. L'effetto "geometrico" finale è che si "stira" orizzontalmente il grafico di f

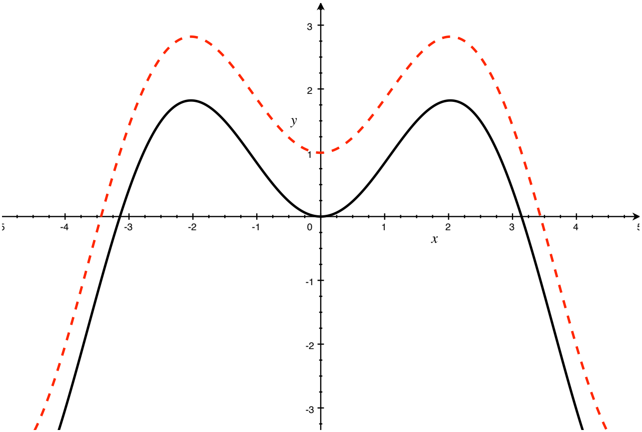


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto f(x) + 1$. Tutti i valori assunti da f vengono aumentati di 1. L'effetto "geometrico" finale è che si trasla verticalmente il grafico di f di una unità di lunghezza

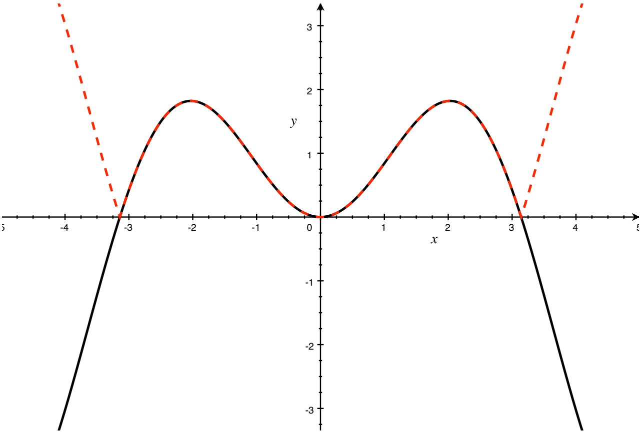


Figura: Tratteggiato in rosso il grafico della funzione $x \mapsto |f(x)|$. Si osservi che se $f(x) \geq 0$, allora $|f(x)| = f(x)$ e in tali punti i due grafici coincidono. Se invece $f(x) < 0$, allora $|f(x)| > 0$ ed il grafico di $|f|$ coincide in tali punti con quello di $-f$. L'effetto "geometrico" finale è che si "ripiega" il grafico di f lungo l'asse delle x

Esercizio

- *Si tracci il grafico della funzione* $f(x) = |x|$
- *Usando soltanto le operazioni sul grafico, tracciare il grafico di*

$$g(x) = 2\left||x+2|-1\right|$$

Soluzione

- Cominciamo tracciando il grafico della funzione $x \mapsto x$
- si tratta di tutte le coppie di punti del piano della forma (x, x), al variare di $x \in \mathbb{R}$
- il grafico è quindi una retta, più precisamente è la bisettrice del primo e del terzo quadrante

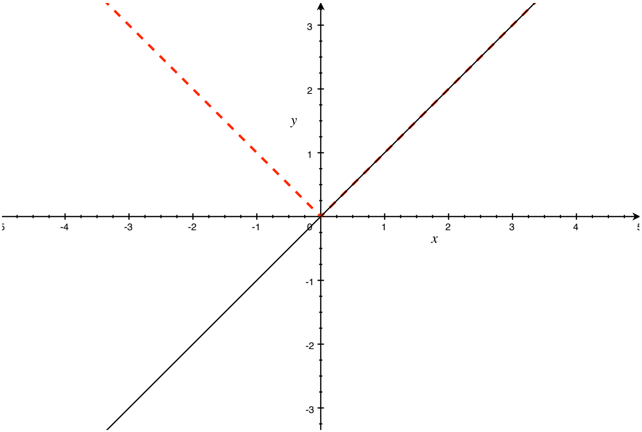


Figura: In nero il grafico di $x \mapsto x$. Tratteggiato in rosso, il grafico di $x \mapsto |x|$. Lo possiamo ricavare in base alle "operazioni sul grafico" viste prima

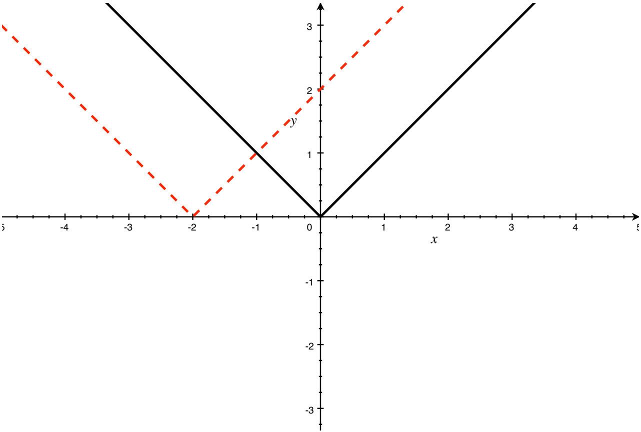


Figura: In nero il grafico di $x \mapsto |x|$. Tratteggiato in rosso, il grafico di $x \mapsto |x+2|$. Abbiamo traslato verso sinistra il grafico di partenza, di due unità di lunghezza

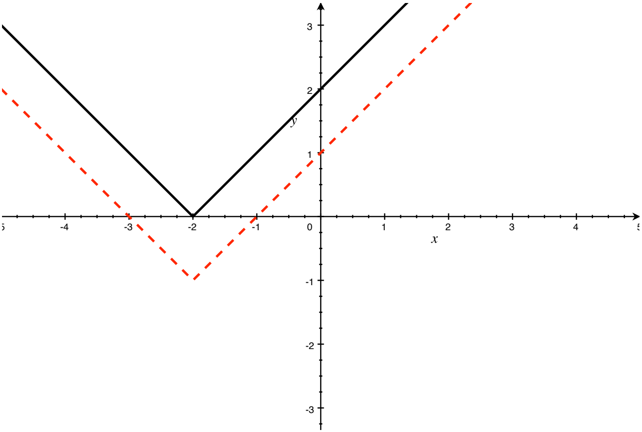


Figura: In nero il grafico di $x \mapsto |x+2|$. Tratteggiato in rosso, il grafico di $x \mapsto |x+2|-1$. Abbiamo traslato verso il basso il grafico di partenza, di una unità di lunghezza

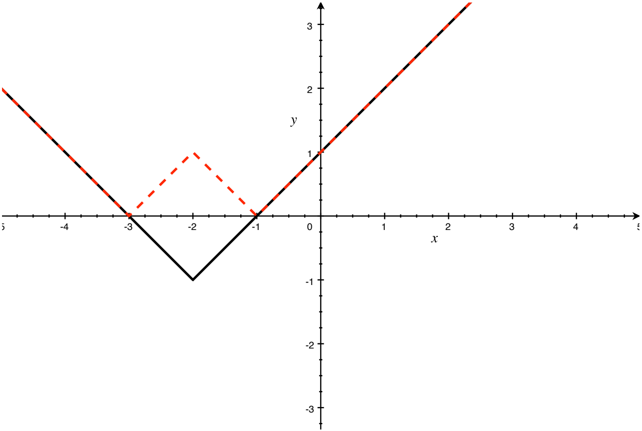


Figura: In nero il grafico di $x \mapsto |x+2|-1$. Tratteggiato in rosso, il grafico di $x \mapsto \Big||x+2|-1\Big|$. Abbiamo "ripiegato" lungo l'asse delle x il grafico di partenza

...ed infine

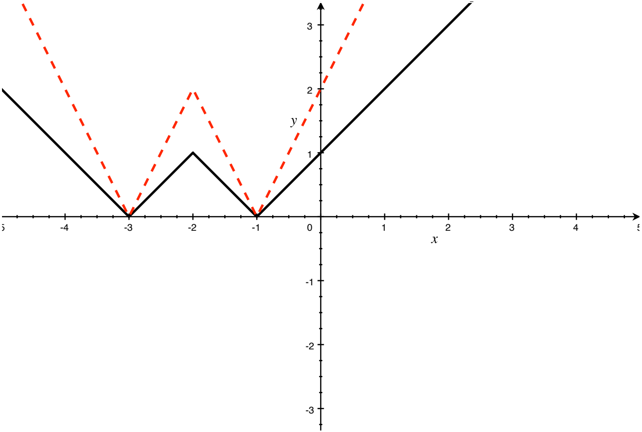


Figura: In nero il grafico di $x \mapsto \Big||x+2|-1\Big|$. Tratteggiato in rosso, il grafico di $x \mapsto 2\Big||x+2|-1\Big|$. Abbiamo "stirato" verticalmente di un fattore 2 il grafico di partenza

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme *simmetrico rispetto all'origine*, ovvero tale che

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad -x \in A$$

Si dice che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è

- **pari** se vale $f(-x) = f(x)$, per ogni $x \in A$
- **dispari** se vale $f(-x) = -f(x)$, per ogni $x \in A$

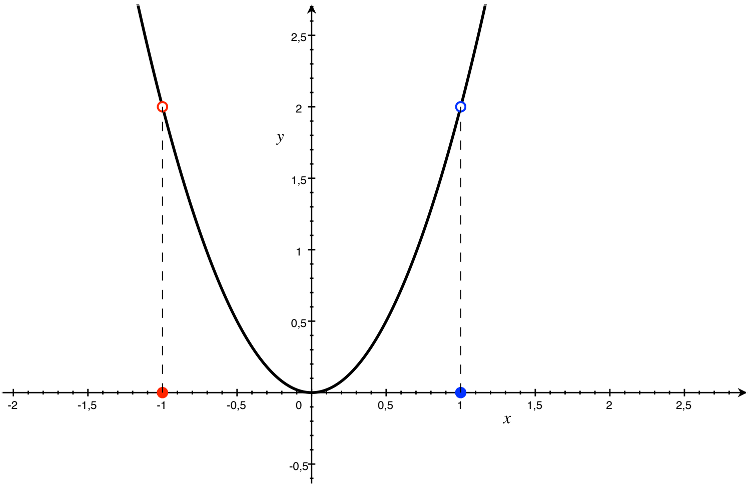


Figura: In blu un punto x del dominio, in rosso il corrispondente punto $-x$. Se f **è pari**, i valori corrispondenti assunti da f sono gli stessi. Il grafico di f risulta essere **simmetrico rispetto all'asse delle** y

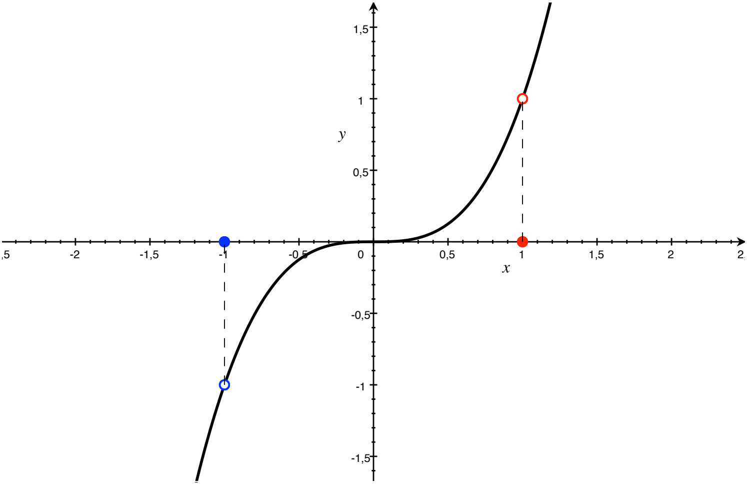


Figura: In blu un punto x del dominio, in rosso il corrispondente punto $-x$. Se f **è dispari**, i valori corrispondenti assunti da f sono uno l'opposto dell'altro. Il grafico di f risulta essere **simmetrico rispetto all'origine degli assi**

Esercizio (per casa)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ *un insieme simmetrico rispetto all'origine.*

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione dispari.*

Si dimostri che se $0 \in A$, *allora si deve avere necessariamente*

$$f(0) = 0$$

Osservazione

In altre parole, se una funzione dispari è definita in 0, allora il suo grafico passa necessariamente dall'origine degli assi cartesiani!