Analisi Matematica A
– *Lezione 6* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 16 Ottobre 2020

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è:

- **monotona crescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_1 < x_2, \text{ risulta } f(x_1) \leq f(x_2)$$
- **monotona strettamente crescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_1 < x_2, \text{ risulta } f(x_1) < f(x_2)$$
- **monotona decrescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_1 < x_2, \text{ risulta } f(x_1) \geq f(x_2)$$
- **monotona strettamente decrescente** se
$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ con } x_1 < x_2, \text{ risulta } f(x_1) > f(x_2)$$

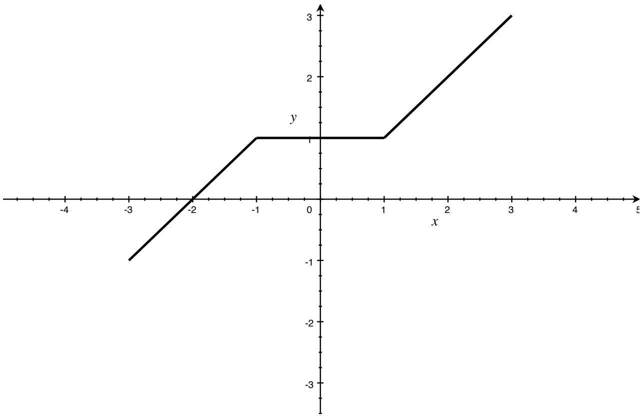

Figura: Il grafico di una funzione monotona crescente: muovendosi verso destra, il grafico "non scende mai" (ma può risultare orizzontale, se la funzione f ha degli intervalli in cui è costante)

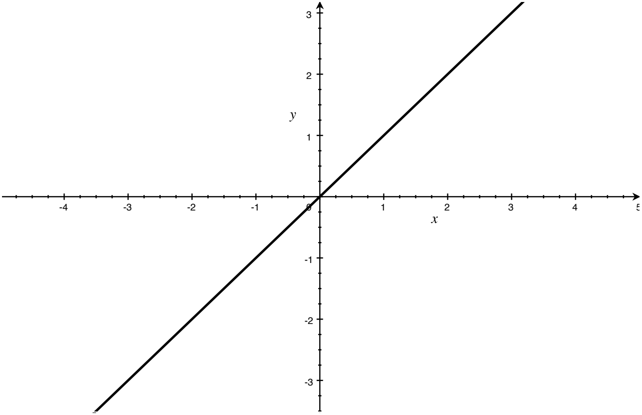

Figura: Il grafico di una funzione monotona **strettamente** crescente: muovendosi verso destra, il grafico “sale sempre” (stavolta non può avere parti orizzontali)

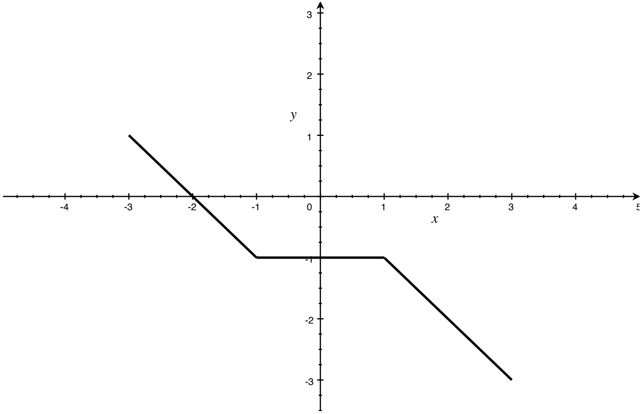

Figura: Il grafico di una funzione monotona decrescente: muovendosi verso destra, il grafico "non sale mai" (ma può risultare orizzontale, se la funzione f ha degli intervalli in cui è costante)

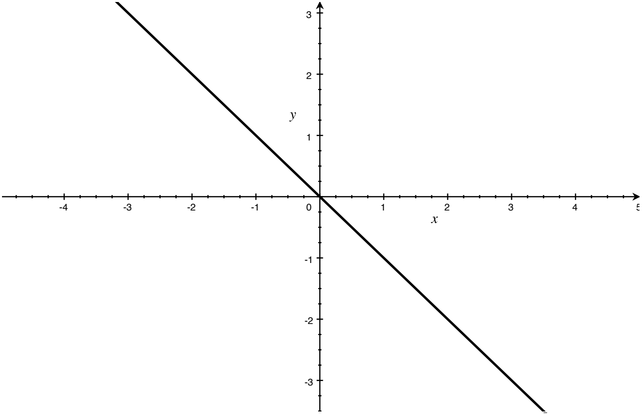

Figura: Il grafico di una funzione monotona **strettamente** decrescente: muovendosi verso destra, il grafico "scende sempre" (stavolta non può avere parti orizzontali)

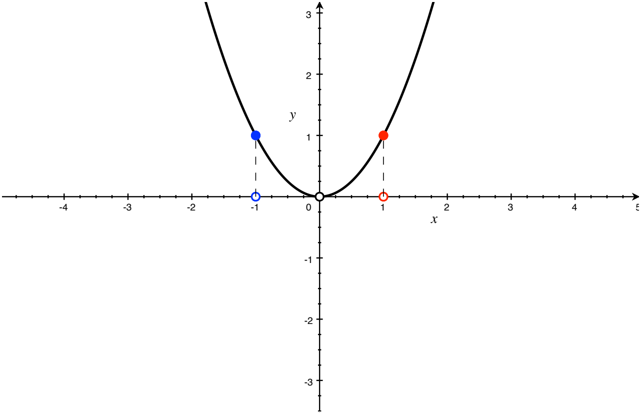

Figura: La funzione $f(x) = x^2$ definita su tutto $\mathbb{R}$ non è monotona sul suo dominio: infatti $-1 < 0$, ma $f(1) > f(0)$ (quindi f **non è crescente**). D'altra parte $0 < 1$, ma $f(0) < f(1)$ (quindi f **non è decrescente**)

Osservazione (Importante)

Le funzioni <u>strettamente</u> crescenti o <u>strettamente</u> decrescenti **sono sempre iniettive**

Infatti, se per y esistessero due soluzioni distinte x_1 e x_2 dell'equazione

$$y = f(x)$$

supponendo per esempio $x_1 < x_2$, dalla stretta monotonia otterremo

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{oppure} \qquad f(x_1) > f(x_2)$$

In ogni caso, avremmo $f(x_1) \neq f(x_2)$ e quindi un assurdo

Quindi, per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = f(x)$ può avere **al più** una soluzione

Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $T > 0$. Si dice che f è $T-$**periodica** se vale la proprietà

$$f(x + T) = f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Osservazione

Dalla definizione, si ottiene

$$f(x + 2\,T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$$

Nelle ultime due uguaglianze, abbiamo usato la definizione di funzione $T-$periodica

Iterando questo ragionamento, se f è $T-$periodica per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$f(x + k\,T) = f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Una funzione $T-$periodica ha la seguente notevole proprietà:

una volta che è nota su un intervallo qualsiasi di lunghezza T, è nota su tutto l'asse reale

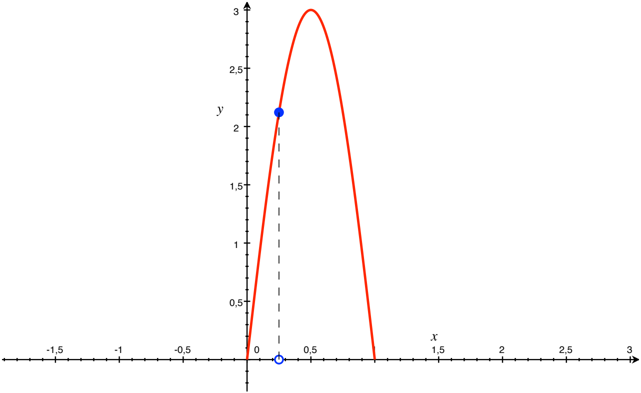

Figura: Una funzione f $1-$periodica: supponiamo che questo sia il suo grafico sull'intervallo $[0, 1]$

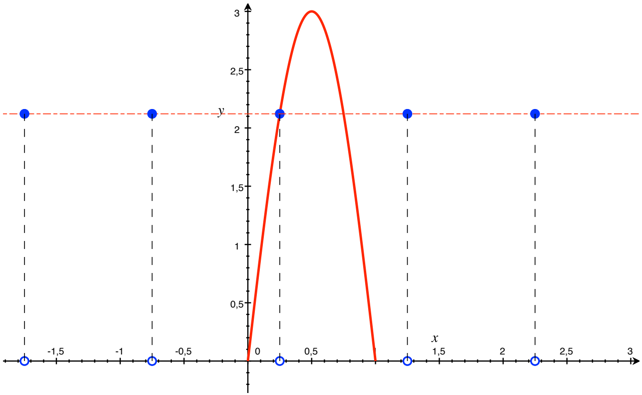

Figura: ...in tutti i punti dell'asse che distano 1 tra di loro, il valore assunto da f è sempre lo stesso...

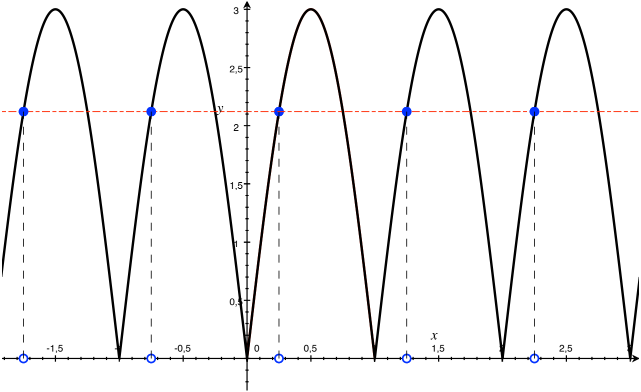

Figura: ...quindi il grafico completo di f si ottiene incollando periodicamente quello iniziale sull'intervallo $[0, 1]$

Osservazione (Importante)

Si osservi che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia $T-$periodica, **non è mai iniettiva** su $\mathbb{R}$

Infatti, per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$y = f(x),$$

o non ammette soluzioni (se y non appartiene all'immagine di f), oppure **ne ha infinite**!

Infatti, abbiamo visto che

$$f(x + k\,T) = f(x), \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Si dice che f è **limitata superiormente**, se la sua immagine $f(A)$ è un sottoinsieme superiormente limitato di $\mathbb{R}$ (vedi *Lezione 3*)

In altre parole, si ha che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \leq M, \qquad \text{per ogni } x \in A$$

Osservazione

Se una funzione f <u>non è</u> limitata superiormente, allora vuol dire che

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_M \in A \text{ tale che } f(x_M) > M$$

ovvero la funzione può assumere valori arbitrariamente grandi

Il fatto che una funzione sia limitata superiormente oppure no **dipende dal dominio su cui la consideriamo**

Esempio (Attenzione!)

Si prendano le due funzioni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad g : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$$

definite entrambe da

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x$$

È facile vedere che f **non è limitata superiormente**:

- per ogni $M \in \mathbb{R}$, se prendiamo come $x = M + 1$ abbiamo che questo punto sta nel dominio di f (che è tutto $\mathbb{R}$)
- allora risulta $f(M + 1) = M + 1 > M$

Viceversa, si vede che g **è limitata superiormente**:

- g è monotona crescente
- infatti, essendo l'identità, più grande è x, più grande sarà $g(x)$
- dal momento che il dominio di g è stavolta $(-\infty, 1]$, si ha che

$$g(x) \leq g(1) = 1, \qquad \text{per ogni } x \in (-\infty, 1]$$

- abbiamo verificato la definizione di *limitata superiormente* con $M = 1$

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Si dice che f è **limitata inferiormente**, se la sua immagine $f(A)$ è un sottoinsieme inferiormente limitato di $\mathbb{R}$ (vedi *Lezione 3*)

In altre parole, si ha che esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) \geq m, \qquad \text{per ogni } x \in A$$

Osservazione

Se una funzione f non è limitata inferiormente, allora vuol dire che

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x_m \in A \text{ tale che } f(x_m) < m$$

ovvero la funzione può assumere valori arbitrariamente grandi **in valore assoluto**, ma negativi

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Si dice che f è **limitata** se essa è sia limitata superiormente che limitata inferiormente

In altre parole, si ha che esistono $M, m \in \mathbb{R}$ tali che

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \text{per ogni } x \in A$$

Esempio

La funzione $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = x$ è limitata (*sapreste dire perché?*)

Abbiamo visto nella *Lezione 3* le definizioni di **estremo inferiore** ed **estremo inferiore** di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$

Adattiamo questa definizione alle funzioni reali di una variabile reale

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ limitata superiormente

Si chiama **estremo superiore di** f **su** A la quantità

$$\sup f(A)$$

ovvero l'estremo superiore dell'immagine di f

Si osservi che questa definizione ha senso, perché $f(A) \subset \mathbb{R}$ ed abbiamo definito nella *Lezione 3* l'estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Simbolo: useremo $\boxed{\sup_{x \in A} f(x)}$ per indicare questa quantità

Osservazione (1)

- Ricordando la definizione di estremo superiore di un insieme E come "**il più piccolo dei maggioranti di** E"
- e ricordando la definizione di **immagine** $f(A)$
- si ha che

$$M = \sup_{x \in A} f(x)$$

  se e solo se

  1. $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$
  2. per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in A$ tale che $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$

Osservazione (2)

Nel caso in cui f non sia limitata superiormente, si pone

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$$

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ limitata inferiormente

Si chiama **estremo inferiore di** f **su** A la quantità

$$\inf f(A)$$

ovvero l'estremo inferiore dell'immagine di f

Si osservi che questa definizione ha senso, perché $f(A) \subset \mathbb{R}$ ed abbiamo definito nella *Lezione 3* l'estremo inferiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Simbolo: useremo $\boxed{\inf_{x \in A} f(x)}$ per indicare questa quantità

Osservazione (1)

- Ricordando la definizione di estremo inferiore di un insieme E come "**il più grande dei minoranti di** E"
- e ricordando la definizione di **immagine** $f(A)$
- si ha che

$$m = \inf_{x \in A} f(x)$$

se e solo se

1. $f(x) \geq m$ per ogni $x \in A$
2. per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in A$ tale che $f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon$

Osservazione (2)

Nel caso in cui f non sia limitata inferiormente, si pone

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty$$

II.5 Funzioni elementari

In questa sezione, diamo un rapido riepilogo delle funzioni elementari che ci serviranno come "mattoncini fondamentali" in tutto il corso, quali:

- potenze (ad esponente naturale, intero, razionale, irrazionale)
- esponenziali
- logaritmi
- funzioni trigonometriche
- funzioni trigonometriche inverse

Potenze naturali

Si definisce $x^0 = 1$ per ogni $x \neq 0$

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ricordando che

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}$$

si tratta della funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

Per studiare le caratteristiche di questa funzione, dobbiamo distinguere due casi

n pari oppure n dispari

n **pari**	n **dispari**
• $(-x)^n = x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$	• $(-x)^n = -x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
quindi la funzione è pari	quindi la funzione è dispari
• per $x \geq 0$, la funzione è strettamente crescente • per $x < 0$, la funzione è strettamente decrescente	• per $x \in \mathbb{R}$, la funzione è strettamente crescente
• non è iniettiva su $\mathbb{R}$ (perché è pari)	• è iniettiva su $\mathbb{R}$ (perché strettamente monotona)

n **pari**	n **dispari**
• è iniettiva su $[0, +\infty)$ (perché strettamente monotona)	
• l'immagine è $[0, +\infty)$ (la funzione assume solo valori positivi)	• l'immagine è $\mathbb{R}$
• la funzione non è biettiva	• la funzione è biettiva
• la funzione diventa biettiva se considerata $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$	//

n **pari**	n **dispari**
è limitata inferiormente (perché assume valori ≥ 0)	//
$\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} x^n = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} x^n = 0$	$\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} x^n = -\infty$
$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} x^n = +\infty$	$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} x^n = +\infty$

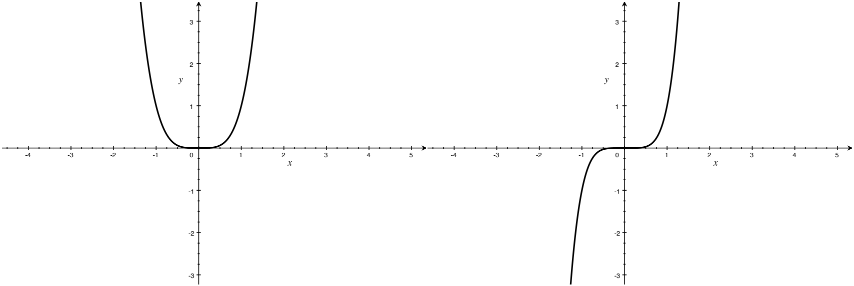

Figura: A sinistra, il grafico di $x \mapsto x^4$; a destra, il grafico di $x \mapsto x^5$. Si noti che la potenza pari **non è iniettiva** su $\mathbb{R}$ (l'equazione $1 = x^4$ ha **due** soluzioni distinte 1 e -1)

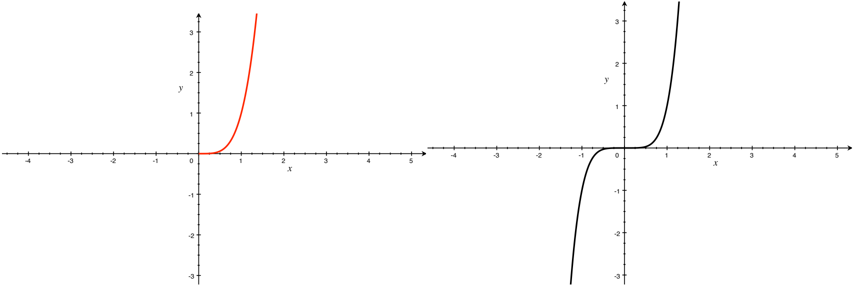

Figura: ....adesso anche la potenza pari è diventata biettiva! Abbiamo **ristretto** il suo dominio a $[0, +\infty)$ ed il suo codominio a $[0, +\infty)$

Essendo biettive, possiamo definirne le **funzioni inverse**

Radice $n-$esima

Si tratta della funzione inversa di $x \mapsto x^n$, quando la possiamo definire

In base alla discussione precedente abbiamo che essa è definita tramite

n **pari**	n **dispari**
$\begin{array}{ccc} [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ y & \mapsto & \text{“unica soluzione} \\ & & x \geq 0 \text{ di } x^n = y\text{”} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \text{“unica soluzione } x \in \mathbb{R} \\ & & \text{di } x^n = y\text{”} \end{array}$
è strettamente crescente	è strettamente crescente
//	è dispari

Notazione

Usiamo $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ come notazione per la funzione **radice** $n-$**esima**

Usiamo anche la notazione $y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$, che è comoda per molti calcoli

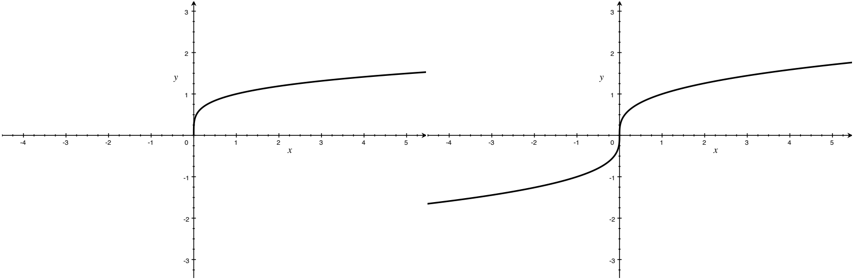

Figura: A sinistra, il grafico di $y \mapsto \sqrt[4]{y}$; a destra, il grafico di $y \mapsto \sqrt[3]{y}$. I grafici sono stato ottenuti con la procedura di "girare il foglio" spiegata nella *Lezione 5*

Potenze intere

Sia adesso $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, vogliamo definire la funzione $x \mapsto x^n$

Se $n \geq 1$, allora l'abbiamo già considerato in precedenza

Se $n \leq -1$, allora si definisce

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

Esempio ($n = -2$)

La funzione $x \mapsto x^{-2}$ è definita come

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

Osservazione

Ricordando che "non si può dividere per 0", se n è **negativo** la funzione $x \mapsto x^n$ è definita per $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Parità?

Anche in questo caso

$x \mapsto x^n$ è pari se $n \in \mathbb{Z}$ è pari

$x \mapsto x^n$ è dispari se $n \in \mathbb{Z}$ è dispari

Monotonia

Quando $n \leq -1$, la funzione $x \mapsto x^n$ è monotona strettamente decrescente per $x > 0$

Infatti, ricordate che per $n \leq -1$

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

e più $x > 0$ diventa grande, più x^{-n} diventa grande, di conseguenza più $1/x^{-n}$ diventa piccolo

Osservate anche che x^n tende ad assumere valori sempre più grandi, a mano a mano che x si avvicina a 0, mentre per x che "tende" a $+\infty$ il risultato della divisione $1/x^{-n}$ si avvicina a 0

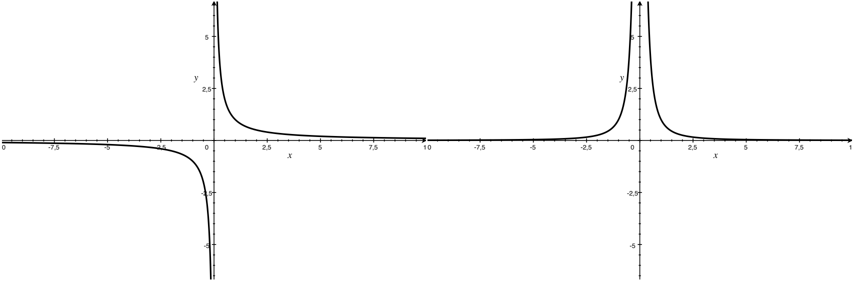

Figura: A sinistra, il grafico di $x \mapsto x^{-1}$; a destra il grafico di $x \mapsto x^{-2}$. Osservate che $x \mapsto x^{-1}$ è biettiva come funzione $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$....sapreste trovare la sua funzione inversa?

Potenze razionali

Siano $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ privi di divisori comuni (a parte 1)

Si definisce la funzione $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ **potenza $\frac{p}{q}$−esima** come

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

ovvero come la composizione delle due funzioni

$$x \mapsto x^p \qquad \text{e} \qquad x \mapsto x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$$

definite in precedenza (ricordate la definizione di **funzione composta**! Vedi *Lezione 4*)

Attenzione!

Il dominio di definizione della radice $q-$esima dipende dalla parità di q, come visto prima

Per capire il dominio di definizione di $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ dobbiamo distinguere

- **Caso 1**: <u>p pari e q dispari</u>

  In tal caso $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Quindi l'operazione

  $$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

  è ben definita **per ogni** $x \in \mathbb{R}$

  Si osservi che dal momento che p è pari, allora $x^p \geq 0$ e quindi

  $$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

  Si tratta inoltre di una funzione **pari**

- **Caso 2**: p dispari e q dispari

  Anche in tal caso $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Quindi l'operazione
  $$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$
  è ben definita **per ogni** $x \in \mathbb{R}$

  Si osservi che dal momento che p e q sono dispari, allora
  $$(-x)^{\frac{p}{q}} = ((-x)^p)^{\frac{1}{q}} = (-x^p)^{\frac{1}{q}} = -(x^p)^{\frac{1}{q}} = -x^{\frac{p}{q}}$$

  Si tratta quindi di una funzione **dispari**, che è
  - positiva se $x \geq 0$
  - negativa se $x < 0$

- **Caso 3**: p dispari e q pari

  Attenzione! In tal caso $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ è definita solo su $[0, +\infty)$. Quindi l'operazione
  $$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$
  è ben definita solo quando $x^p \geq 0$ ovvero **per ogni** $x \geq 0$

Potenze irrazionali

Infine, discutiamo brevemente la funzione

$$x \mapsto x^\alpha$$

quando $\alpha = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ovvero quando α **non è** razionale

In tal caso, sfruttiamo

- la definizione precedente di "potenza razionale"
- la proprietà di **densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$** (vedi *Lezione 3*)

e definiamo per ogni $\boxed{x \geq 0}$

$$\text{se } x \in [0,1], \qquad x^\alpha = \inf \left\{ x^{\frac{p}{q}} \ : \ \frac{p}{q} < \alpha \right\}$$

$$\text{se } x \in (1,+\infty), \qquad x^\alpha = \sup \left\{ x^{\frac{p}{q}} \ : \ \frac{p}{q} < \alpha \right\}$$

Memento: regole di calcolo delle potenze

In base alla definizione di funzione potenza (con esponente in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) si ha

$$\boxed{x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}}$$

e

$$\boxed{(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\,\beta}}$$

Fino al caso degli esponenti razionali, dimostrare queste proprietà è abbstanza facile.

Per esponenti irrazionali è un po' più complicato, prendiamolo per buono

Esempio

$$\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x^2} = x^{\frac{1}{2}}\, x^{-2} = x^{\frac{1}{2}-2} = x^{\frac{1-4}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Esponenziali

Sia a una **base**, ovvero

$$\boxed{a > 0 \quad e \quad a \neq 1}$$

Si definisce la funzione **esponenziale di base** a come la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

Attenzione!

Fate attenzione a non confondere **potenze** ed **esponenziali**

- nelle potenze, la base è variabile e l'esponente è fisso
- negli esponenziali, la base è fissa e l'esponente è variabile

Alcune proprietà

- La funzione esponenziale di base a è **strettamente monotona**, quindi iniettiva
- la sua immagine è tutto $(0, +\infty)$
- quindi si ha

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} a^x = 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} a^x = +\infty$$

- 0 **non è** il minimo della funzione, perché $\nexists x$ tale che $a^x = 0$
- come funzione $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è **biettiva**

"*Prof! Ma è strettamente crescente o strettamente crescente?*"

$$\boxed{\text{Dipende dalla base } a}$$

- Caso $\boxed{a > 1}$: in questo caso, il numero reale a^x cresce al crescere dell'esponente x quindi

$$x \mapsto a^x \text{ è strettamente crescente}$$

- Caso $\boxed{0 < a < 1}$: in questo caso, possiamo scrivere

$$\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

Adesso $1/a$ è una base più grande di 1, quindi per il punto precedente

$$x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

è strettamente crescente

Ma allora $x \mapsto a^x$ è strettamente decrescente

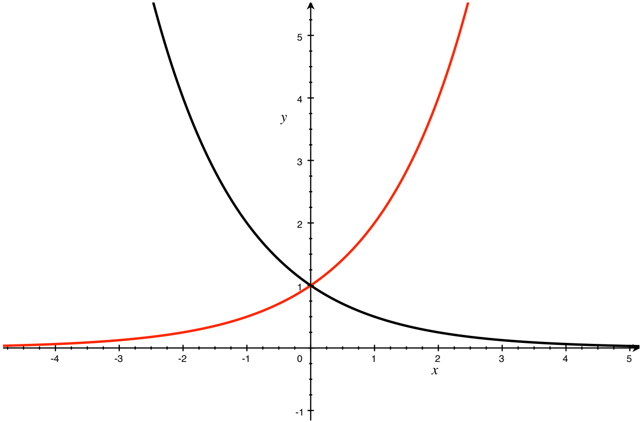

Figura: In rosso il grafico di $x \mapsto a^x$ con $\boxed{a > 1}$. In nero il grafico di $x \mapsto a^x$ con $\boxed{0 < a < 1}$. Osservate che il grafico passa comunque dal punto $(0, 1)$, perché $a^0 = 1$

Dalle *regole di calcolo delle potenze*, abbiamo le

Regole di calcolo per l'esponenziale

(E1) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

(E2) $(a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$, per ogni α, $x \in \mathbb{R}$

Logaritmi

Sia di nuovo a una **base**, ovvero

$$\boxed{a > 0 \quad e \quad a \neq 1}$$

Si definisce la funzione **logaritmo in base** a come la funzione inversa della funzione esponenziale di base a

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (0, +\infty) \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

In base alla definizione generale di funzione inversa (vedi *Lezione 5*) si ha quindi che tale funzione è definita da

$$\begin{array}{ccc} (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \text{“ l'unica soluzione } x \in \mathbb{R} \text{ di } y = a^x \text{''} \end{array}$$

Osservazione

Si osservi che l'esponenziale aveva dominio $\mathbb{R}$ e codominio $(0, +\infty)$

Per il logaritmo, il dominio diventa $(0, +\infty)$ ed il codominio $\mathbb{R}$

Vediamo se abbiamo capito che cosa è il logaritmo

Prendiamo come base $a = 2$

Esempio

- $\log_2 4 =$ " l'unica soluzione x di $2^x = 4$ " $= 2$
- $\log_2 \frac{1}{2} =$ " l'unica soluzione x di $2^x = \frac{1}{2}$ " $= -1$
- $\log_2 16 =$ " l'unica soluzione x di $2^x = 16$ " $= 4$

Prendiamo anche una base minore di 1, es. $a = \dfrac{1}{2}$

Esempio

- $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2} =$ " l'unica soluzione x di $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2}$ " $= 1$
- $\log_{\frac{1}{2}} 4 =$ " l'unica soluzione x di $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4$ " $= -2$
- $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} =$ " l'unica soluzione x di $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{4}$ " $= 2$

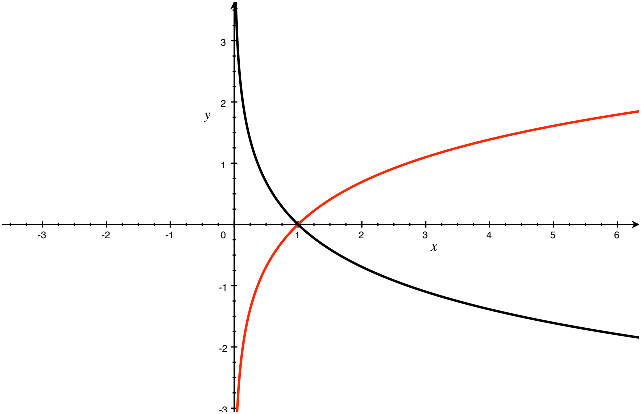

Figura: In rosso il grafico di $x \mapsto \log_a x$ con $a > 1$. In nero il grafico di $x \mapsto \log_a x$ con $0 < a < 1$. I grafici sono stato ottenuti con la procedura di "girare il foglio" spiegata nella *Lezione 5*

Ricordando che $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ devono dare l'identità, abbiamo allora

$$\boxed{a^{\log_a y} = y \qquad \text{per ogni } y > 0}$$

ed anche

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$$

Useremo spesso questo fatto, **imparatelo bene**

Dalle regole di calcolo (E1) e (E2) per l'esponenziale e la definizione di funzione inversa, abbiamo le

Regole di calcolo per il logaritmo

(L1) $\log_a y_1 + \log_a y_2 = \log_a(y_1\, y_2)$, per ogni $y_1, y_2 > 0$

(L2) $\log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a y$, per ogni $y > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

- Usando la regola (E1)

$$a^{\log_a y_1 + \log_a y_2} = a^{\log_a y_1} \cdot a^{\log_a y_2}$$

- ricordando che il logaritmo è l'inversa dell'esponenziale, la precedente si può riscrivere

$$a^{\log_a y_1 + \log_a y_2} = y_1 \cdot y_2$$

- d'altronde, usando di nuovo che il logaritmo è l'inversa dell'esponenziale, si ha anche

$$y_1 \cdot y_2 = a^{\log_a (y_1\, y_2)}$$

- comparando le ultime due identità, abbiamo quindi ottenuto

$$a^{\log_a y_1 + \log_a y_2} = a^{\log_a (y_1\, y_2)}$$

- usando che l'esponenziale è iniettivo

$$a^{\log_a y_1 + \log_a y_2} = a^{\log_a (y_1\, y_2)} \quad \iff \quad \log_a y_1 + \log_a y_2 = \log_a (y_1\, y_2)$$

- questo dimostra la (L1)
- dimostrate la (L2) *per casa*

Cambio di base

Se a, b sono due basi, vale la regola

$$\log_b y = (\log_b a) \cdot (\log_a y) \qquad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

- La dimostrazione di questa formula è più importante della formula stessa, perché è un esercizio di verifica se abbiamo capito il logaritmo
- il trucco (lo useremo molte volte!) è quello di usare il fatto che il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale, per scrivere

$$y = a^{\log_a y}$$

- quindi si ha

$$\log_b y = \log_b(a^{\log_a y})$$

- si ricordi adesso la regola di calcolo (L2)

$$\log_b(y^\alpha) = \alpha \log_b y$$

- usiamo questa formula con $y = a$ e $\alpha = \log_a y$, quindi

$$\log_b y = \log_b(a^{\log_a y}) = \log_a y \log_b a$$

- che è esattamente la formula che volevamo!

Caso particolare

Prendendo come base b l'inverso $1/a$, si ottiene

$$\log_{\frac{1}{a}} y = -\log_a y \qquad \text{per ogni } y > 0$$

Esercizio (Compito del 23/02/2018)

Si trovino tutte le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$\log_2(x+2) = \log_4(x+4)$$

Soluzione

- Osserviamo innanzitutto che, affinché l'equazione abbia senso, bisogna richiedere che

$$x+2>0 \qquad \text{e} \qquad x+4>0$$

- le soluzioni vanno quindi cercate tra gli x tali che $\boxed{x>-2}$
- detto questo, la difficoltà principale dell'esercizio è che i due logaritmi hanno **basi diverse**
- *Niente panico!* Abbiamo la formula di cambio base. Possiamo scrivere tutto in base 2 o in base 4

- possiamo per esempio scrivere

$$\log_2(x+4) = \log_2 4 \, \log_4(x+2)$$

- osservando che $\log_2 4 = 2$ (perché 2 è l'unica soluzione di $2^x = 4$) si ha

$$\log_2(x+4) = 2 \, \log_4(x+2)$$

- inoltre per la regola di calcolo (L2) si ha

$$\log_2(x+4) = 2 \, \log_4(x+2) = \log_4(x+2)^2$$

- abbiamo quindi che

$$\log_2(x+2) = \log_4(x+4) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_4(x+2)^2 = \log_4(x+4)$$

- adesso per risolvere

$$\log_4(x+2)^2 = \log_4(x+4)$$

basta usare che **il logaritmo è iniettivo**

- quindi

$$\log_4(x+2)^2 = \log_4(x+4) \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)^2 = (x+4)$$

- ci siamo ridotti a risolvere un'equazione di grado 2
- $$(x+2)^2 = (x+4) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4\,x + \cancel{4} = x + \cancel{4}$$
- ovvero siamo ridotti a risolvere

$$x^2 + 3\,x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x\,(x+3) = 0$$

- le soluzioni possibili di

$$x(x+3)=0$$

sono

$$x=0 \qquad \text{e} \qquad x=-3$$

- tuttavia la seconda soluzione $x=-3$ **va scartata**...
- ...si ricordi che abbiamo la restrizione iniziale $x>-2$
- **in conclusione**

$$x=0$$

è l'unica soluzione