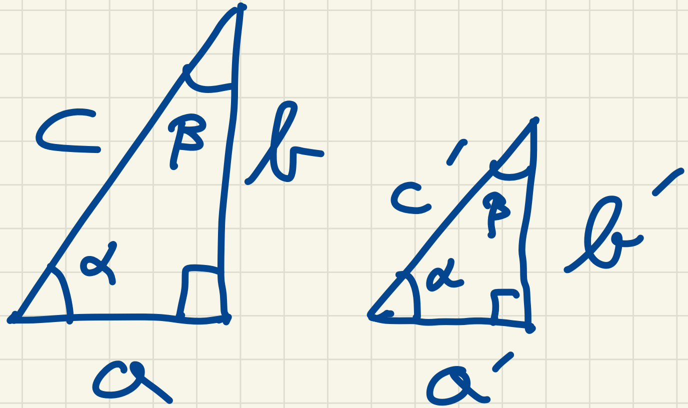
ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 7 –

LORENZO
BRASCO

21 OTTOBRE 2020

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



TRIANGOLI
RETTANGOLI
SIMILI

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad E \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

DEFINIAMO $\cos\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a'}{c'}$ COSENO DI α

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

SENO DI α

$$\cos\beta = \frac{b}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{a}{c}$$

$\pi = 180°$

OSSERVIAMO CHE $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

IN BASE A QUANTO DETTO SOPRA ABBIAMO OTTENUTO

$$\sin\beta = \frac{a}{c} = \cos\alpha$$

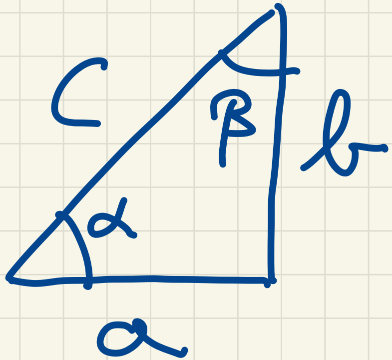
$$\|$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{OVVERO}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha}$$

ANALOGAMENTE SI HA

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha}$$



IN BASE ALLA DEFINIZIONE

$$\left[\begin{array}{l} a = c\cos\alpha \\ b = c\sin\alpha \end{array}\right]$$

DAL TEOREMA DI PITAGORA SI HA

$$a^2+b^2=c^2$$

OVVERO

$$\cancel{c^2}\cos^2\alpha+\cancel{c^2}\sin^2\alpha=\cancel{c^2}$$

DA CUI

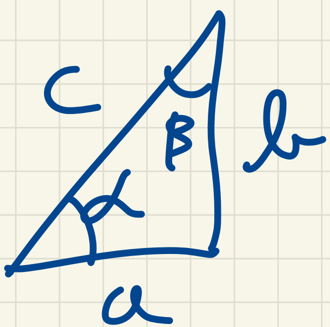
$$\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}$$

IDENTITÀ FONDAMENTALE

FIN'ORA ABBIAMO DEFINITO
SENO E COSENO SU $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

INTRODUCIAMO ANCHE LA TANGENTE

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cancel{c}} \cdot \frac{1}{\frac{a}{\cancel{c}}}$$



$$= \frac{b}{a}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

FORMULE VISTE PRIMA

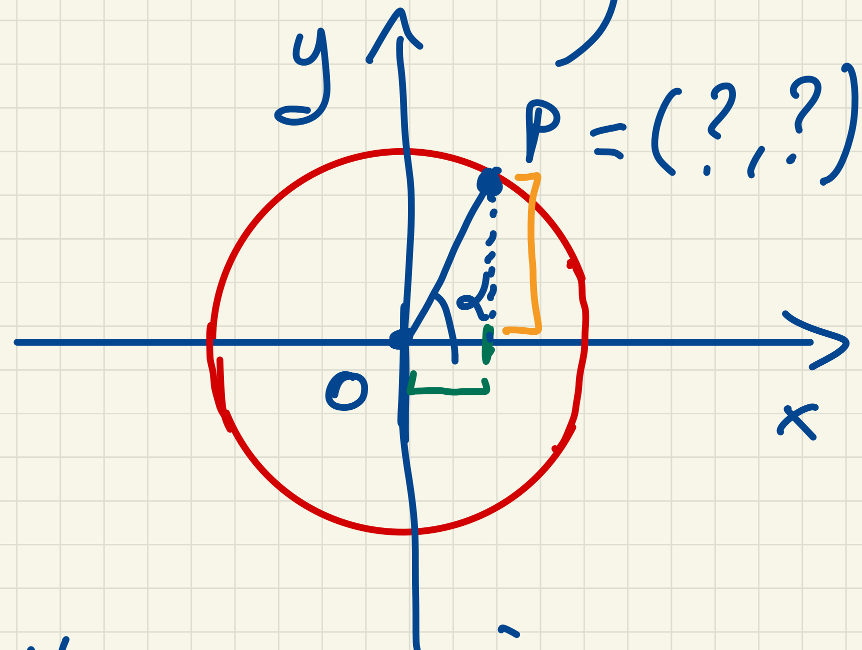
$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

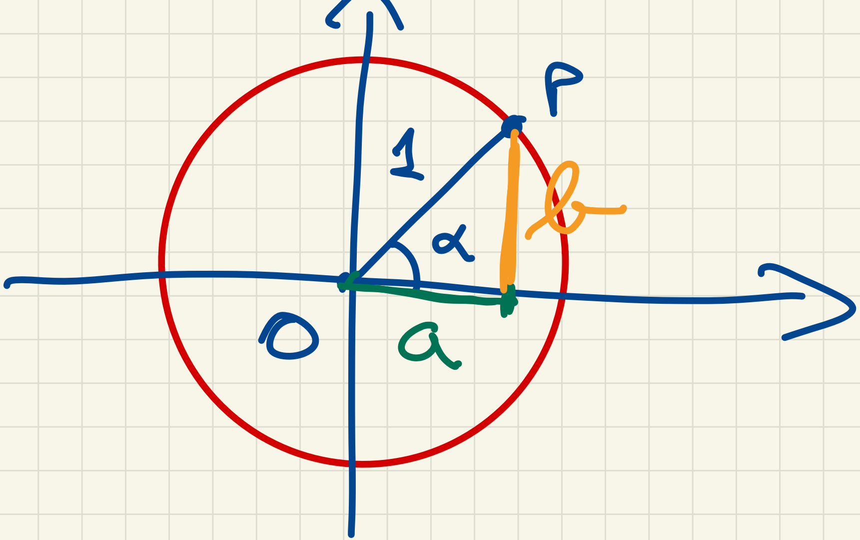
ESTENDIAMO QUESTE DEFINIZIONI AD $\alpha \in \mathbb{R}$ (SE POSSIBILE)

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

(CIRCONFERENZA CENTRATA IN $(0,0)$ E RAGGIO 1)



L'IPOTENUSA È LUNGA 1, COME IL RAGGIO

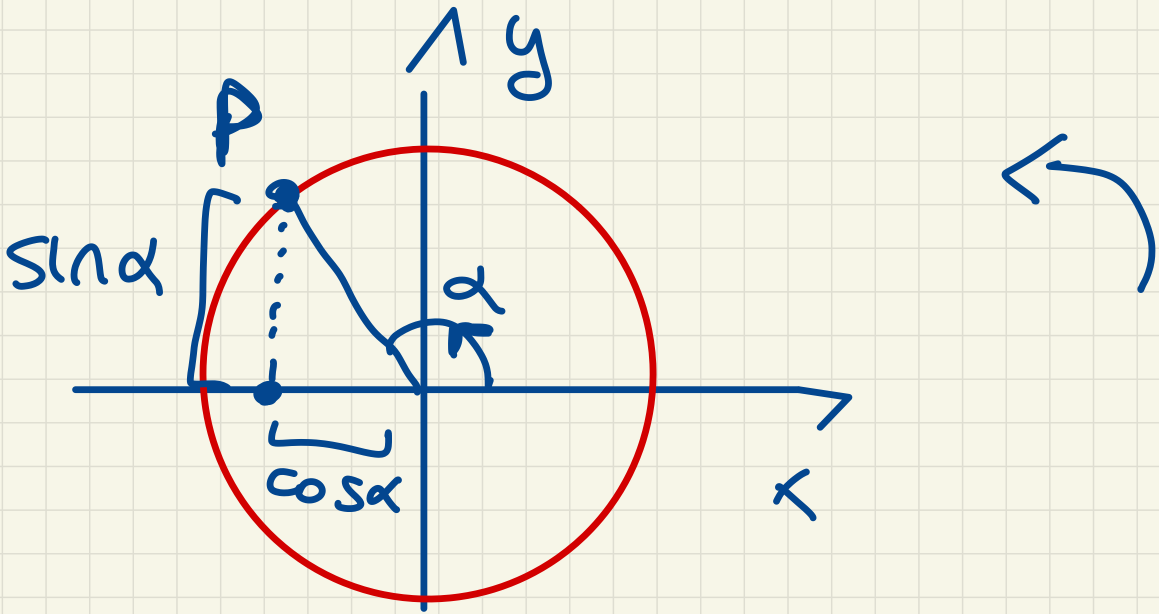


$a = 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$

$b = 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$

QUINDI $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

POSSO USARE QUESTA COSTRUZIONE PER DEFINIRE $\cos\alpha$ E $\sin\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$



IN QUESTO MODO, RISULTANO DEFINITE 2 FUNZIONI SENO E COSENO

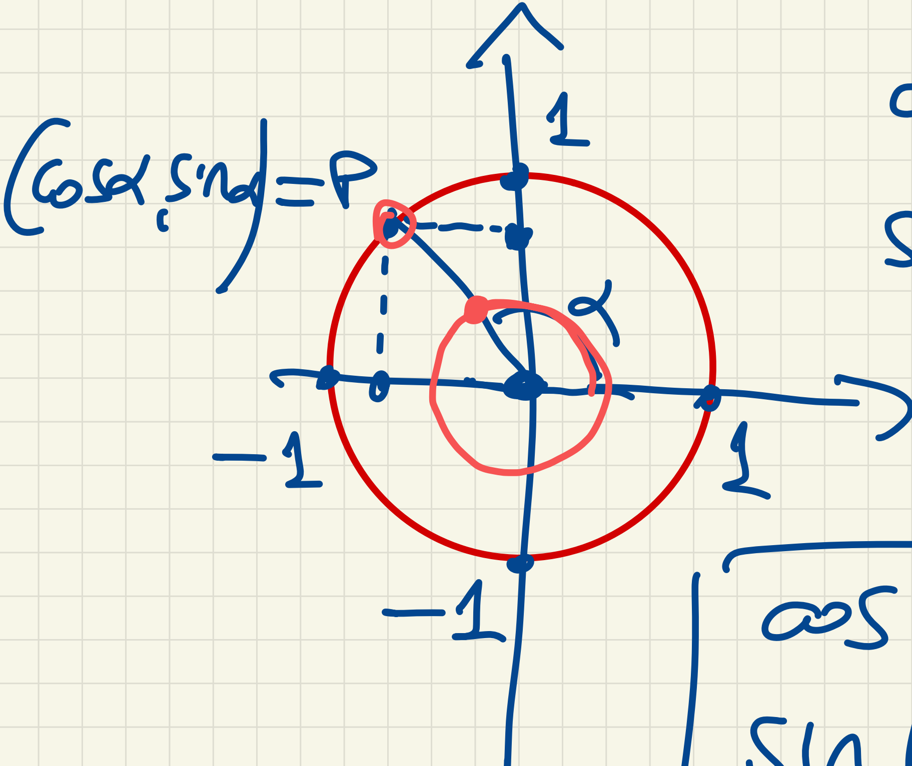
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

OVVERO

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$



$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

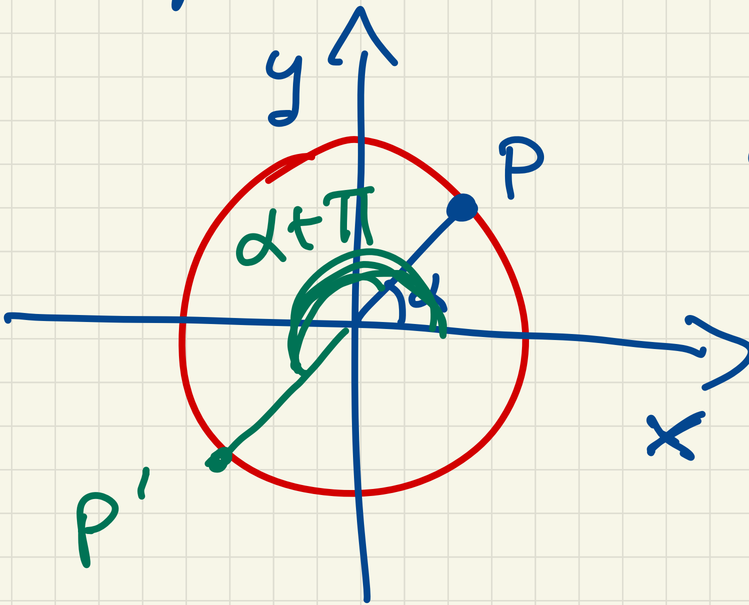
È PIÙ IN GENERALE

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos\alpha \\ \sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin\alpha\end{aligned}}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$

SONO
2π-PERIODICHE

QUINDI SENO E COSENO NON SONO INIETTIVE SU $\mathbb{R}$



$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}$$

SE ADESSO DEFINISCO LA TANGENTE

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$ È ANCORA PERIODICA

$$\tan(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}$$

FORMULA PRECEDENTE

$$= \frac{\cancel{-}\sin\alpha}{\cancel{-}\cos\alpha} = \tan\alpha$$

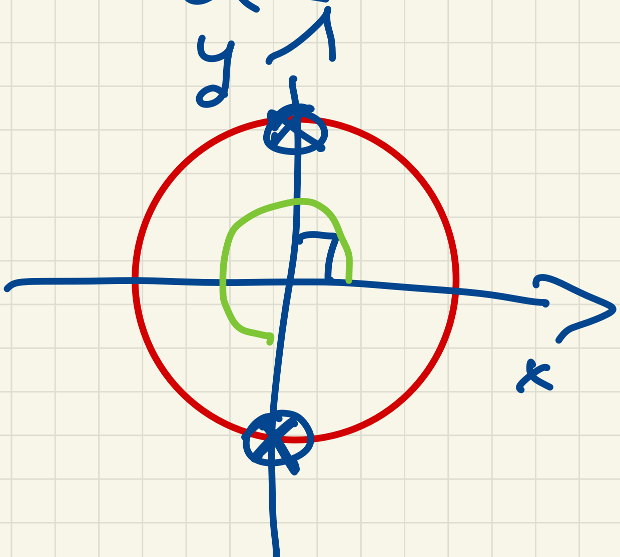
CIOÈ tan È π-PERIODICA

(QUINDI DI NUOVO NON È INIETTIVA)

QUAL È IL DOMINIO DELLA TANGENTE?

tan α È DEFINITO SOLO SE

$\alpha \in \mathbb{R}$ È T.C. $\cos\alpha \neq 0$



OSSERVO CHE

$\cos\alpha = 0$

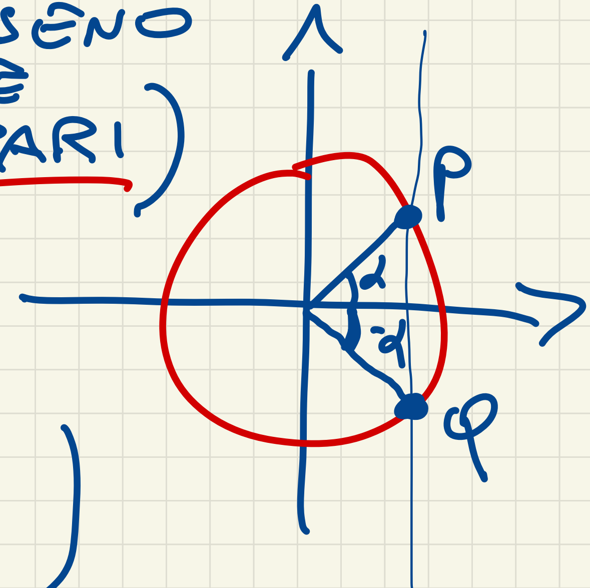
$\iff \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

PER $k \in \mathbb{Z}$

TANGENTE È DEFINITA SU

$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (COSENO È PARI)



- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

(SENO È DISPARI)

- $\tan(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$

(TANGENTE È DISPARI)

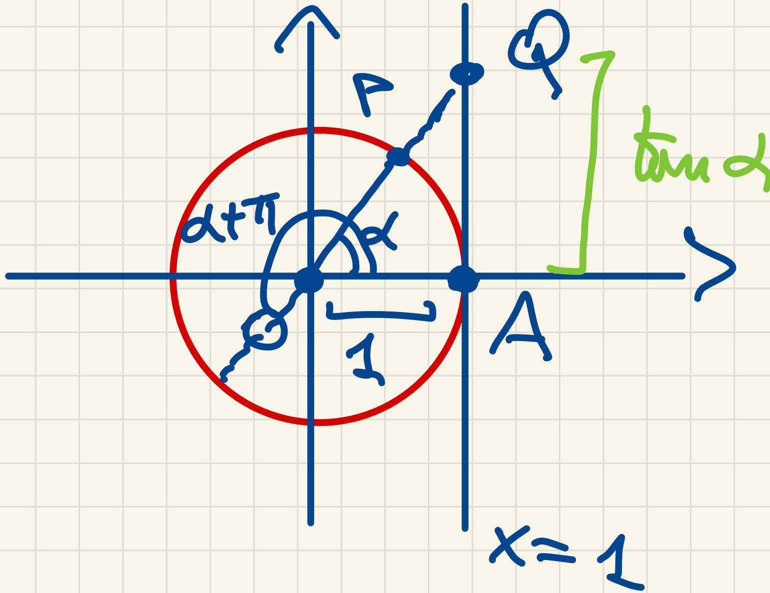
CONTINUANO A VALERE

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$



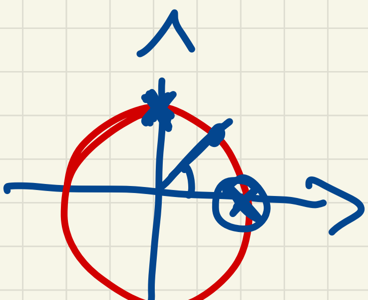
$\overset{\triangle}{OAQ}$ è RETTANGOLO

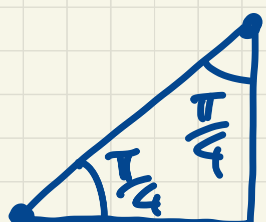
$$\tan\alpha = \frac{QA}{OA} = QA$$

VALORI NOTEVOLI DI

SENO, COSENO, TANGENTE

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	//





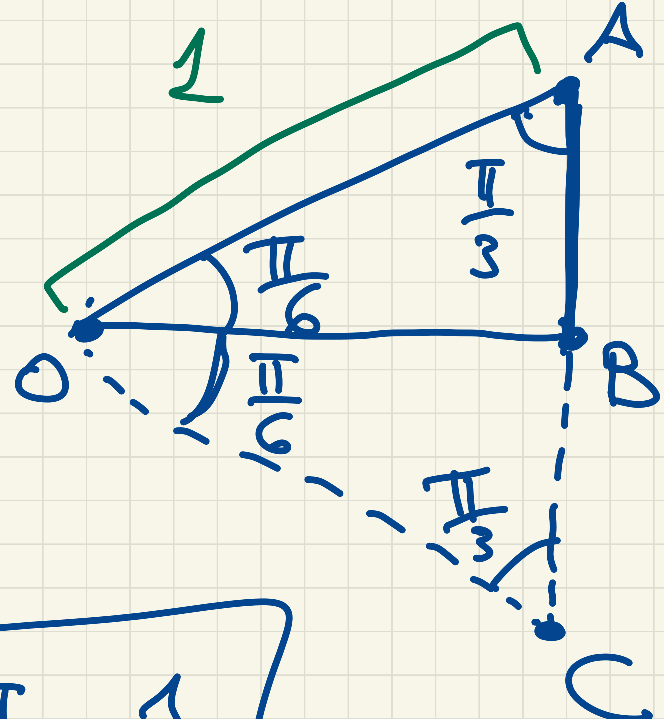
$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} \\ \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

- CIOÈ $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$ OVVERO

$\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ DA CUI $\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

ED ANCHE $\boxed{\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

- $\cos\frac{\pi}{6} = ?$ $\sin\frac{\pi}{6} = ?$



$$AB = \frac{OA}{2} = \frac{1}{2}$$

MA

$$AB = \sin\frac{\pi}{6}$$

QUINDI

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{6} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

DA CUI

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

FORMULE DI ADDIZIONE

1. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
2. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
4. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

IN REALTÀ ②, ③ E ④ SEGUONO TUTTE DALLA ①, PIÙ LE PROPRIETÀ DI SENO E COSENO.

DIM.

DIAMO ① PER BUONA.

DIMOSTRIAMO LA ②:

$$\cos(x-y) = \cos(x+(-y))$$

$$\overset{1}{=} \cos(x)\underbrace{\cos(-y)}_{\cos y} - \sin x \underbrace{\sin(-y)}_{-\sin y}$$

$= \cos x \cos y + \sin x \sin y$

COSENO PARI
SENO DISPARI

ok!

DIMOSTRIAMO ADESSO LA FORMULA 3 :

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right)$$

VISTA PRIMA

$$= \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - x}_{} - \underbrace{y}_{}\right) = $$

2

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sin x}\cos(y) + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\cos x}\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

ok!

PER CASA: DIMOSTRATE LA (4).

FORMULE DI DUPLIZAZIONE

(5) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(6) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

DIM.

PER DIMOSTRARE 5, OSSERVO CHE

$$\cos(2x) = \cos(x+x) \overset{1}{=} \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

PER DIMOSTRARE 6, OSSERVO CHE

$$\sin(2x) = \sin(x+x) \overset{3}{=} \sin x \cos x + \sin x \cos x$$

$$= 2 \sin x \cos x \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ 5 SI PUÒ SCRIVERE IN ALTRI MODI, USANDO

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ALLORA

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

OPPURE

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

FORMULE DI BISEZIONE

⑦ $$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

⑧ $$\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

DIM.

PER DIMOSTRARE ⑦, BASTA OSSERVARE CHE

$$x = 2 \cdot \frac{x}{2}$$

QUINDI SI

MA

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$$

$$5 \;=\; 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

OVVERO

$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1+\cos x$$ CIOÈ

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$$ OVVERO

$$\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$ COME VOLEVO

LA FORMULA 8 DIMOSTRATELA PER CASA.

$\boxed{\text{OSS.}}$ (ATTENZIONE!)

ABBIAMO USATO CHE

$$\sqrt{x^2} = \text{" L'UNICA SOLUZIONE } t \geq 0 \text{ DI } x^2 = t^2 \text{ "}$$

$$= |x|$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

ESERCIZIO TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI

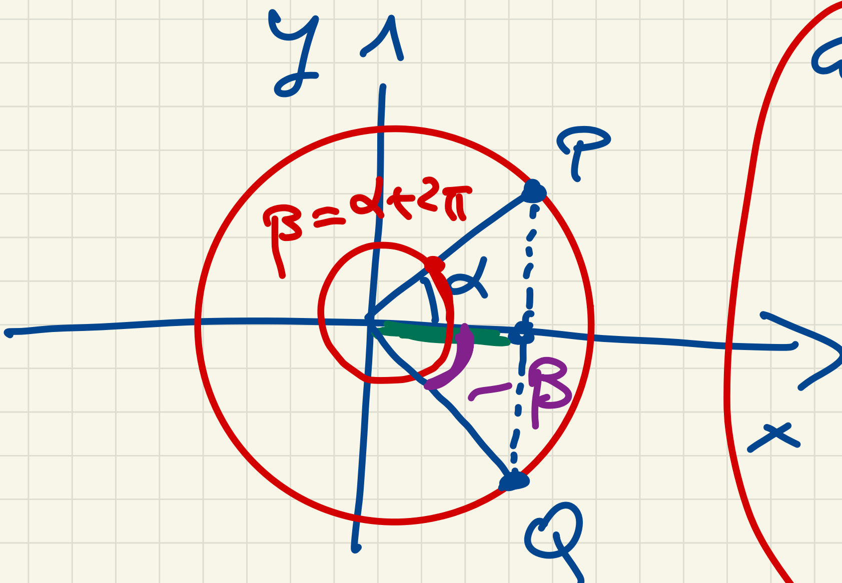
$$\cos\left(2x - \frac{5}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

SOL.

SE HO $\cos\overbrace{\alpha} = \cos\overbrace{\beta}$

CHE COSA POSSO DIRE DELLA RELAZIONE TRA α E β?

IN ALTRE PAROLE, QUANDO È CHE 2 ANGOLI HANNO LO STESSO COSENO?



$\cos\alpha = \cos\beta$

$\iff \alpha = \beta + 2k\pi$

OPPURE

$\alpha = -\beta + 2k\pi$

CON $k \in \mathbb{Z}$

QUINDI TORNANDO ALL'EQUAZIONE INIZIALE

$$\cos\left(2x - \frac{5}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \iff$$

$$2x - \frac{5}{4}\pi = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$$

$\Longleftrightarrow$ OPPURE $(k \in \mathbb{Z})$

$$2x - \frac{5}{4}\pi = -\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2k\pi$$

$$\Longleftrightarrow \overbrace{2x + x}^{=3x} = \overbrace{\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + 2k\pi$$

OPPURE $(k \in \mathbb{Z})$

$$2x - x = \frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

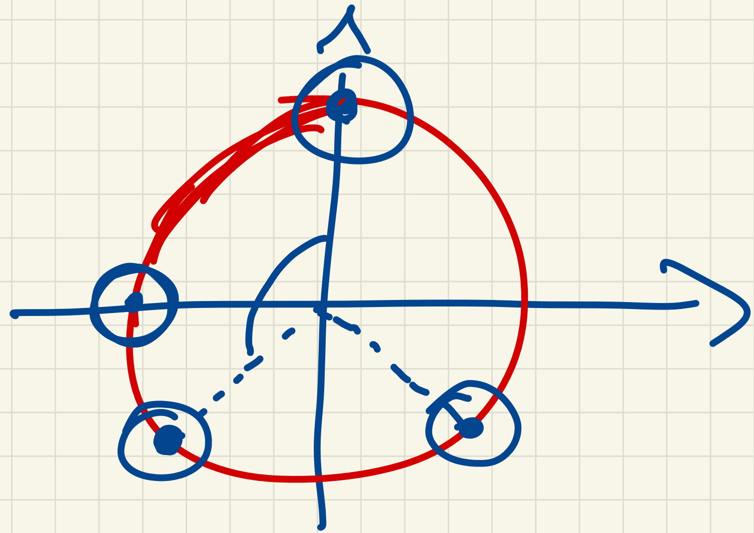
$$\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$$

OPPURE $\quad (k \in \mathbb{Z})$

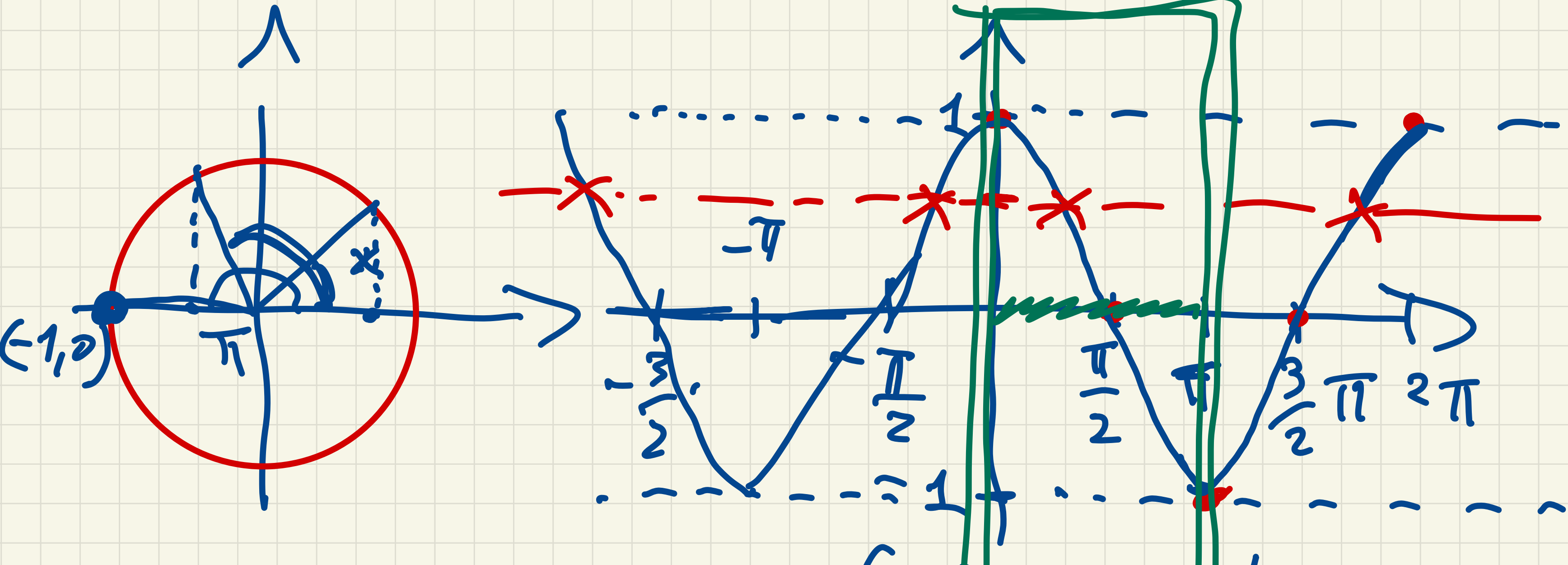
$$x = \pi + 2k\pi$$

OVVERO LE SOLUZIONI SONO DATE DALL'INSIEME

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3},\ \pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

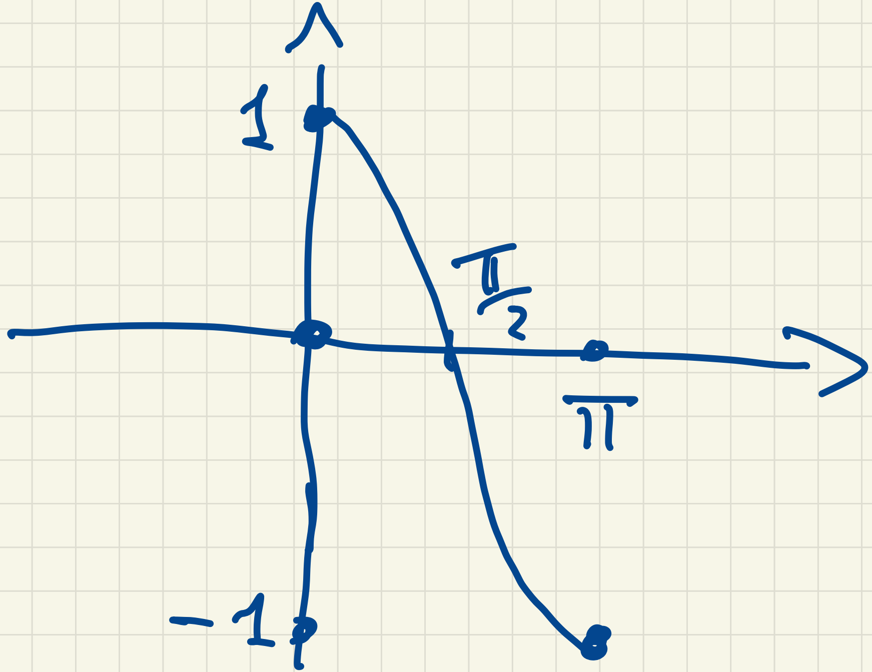


GRAFICI DI SENO, COSENO, TANGENTE



COSENO (È PARI)

OSSERVIAMO CHE
SU $[0, \pi]$ IL COSENO È
ST. DECRESCENTE $\Rightarrow$ QUINDI INIETTIVO!



ALLORA $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [1, -1]$

È BIETTIVA, POSSO DEFINIRE LA SUA INVERSA

ESSA SI CHIAMA <u>ARCO COSENO</u>

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

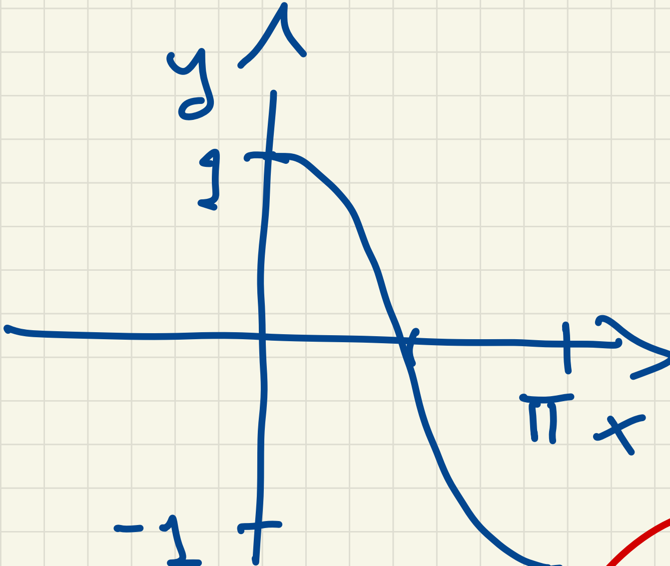
$$y \longmapsto$$ "L'UNICA SOLUZIONE $x \in [0, \pi]$ DI $y = \cos x$"

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$ "L'UNICA SOLUZIONE $x \in [0, \pi]$ DI $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos x$"

OVVERO

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$



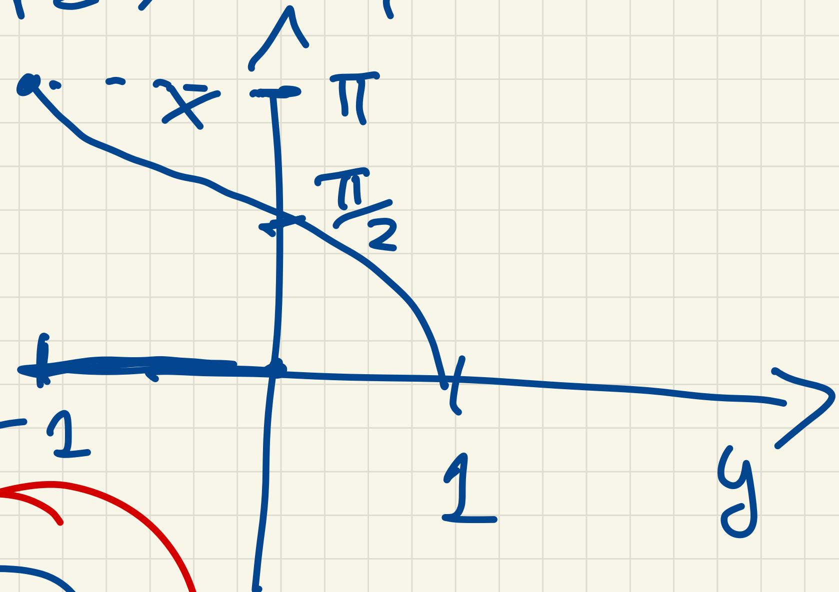
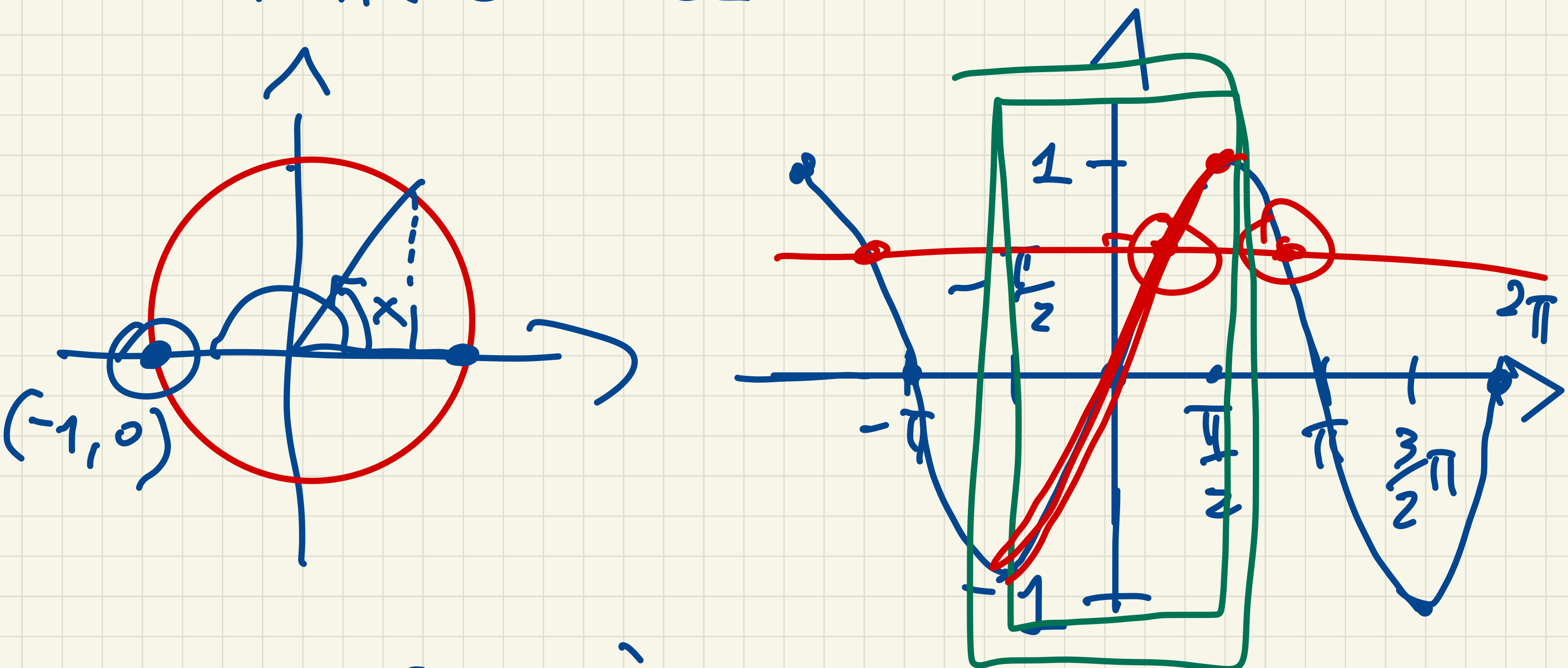


GRAFICO DEL SENO



SENO È DISPARI

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ è BIETTIVA

QUINDI LA FUNZIONE INVERSA È BEN DEFINITA E SI CHIAMA **ARCOSENO**

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y \longmapsto \text{"L'UNICA SOLUZIONE } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ DELL'EQUA} \ldots \; y = \cos x\text{"}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ "UNICA $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ T.C. $\sin x = \sqrt{3}/2$"

OVVERO

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

- **PER CASA**: ESERCIZI SULLE DISPENSE