ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 8 –

LORENZO BRASCO

23 OTTOBRE 2020

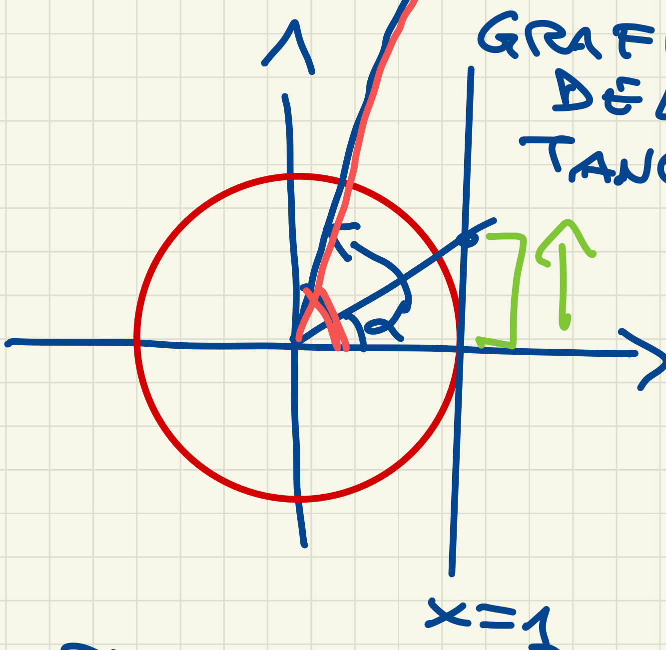
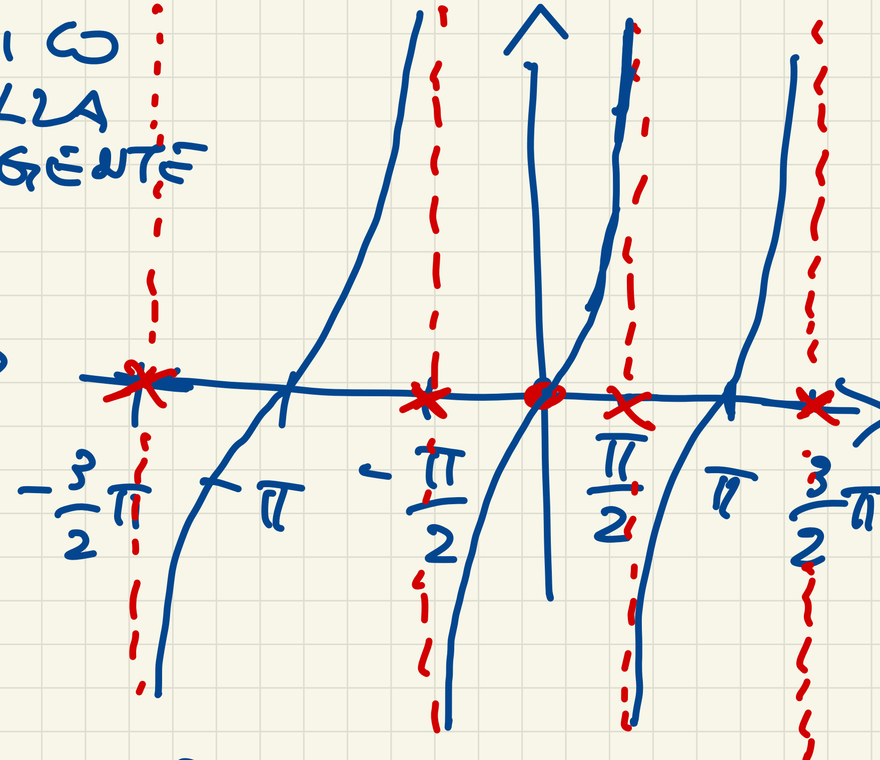


GRAFICO DELLA TANGENTE



RICORDA:

TANGENTE È DISPARI E π-PERIODICA

$\boxed{\text{OSSERVA}}$ $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ È BIETTIVA (ST. CRESCENTE)

POSSIAMO DEFINIRE LA SUA FUNZIONE INVERSA, SI CHIAMA ARCOTANGENTE

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y \longmapsto \text{"L'UNICA SOLUZIONE } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ DI } \tan x = y\text{"}$$

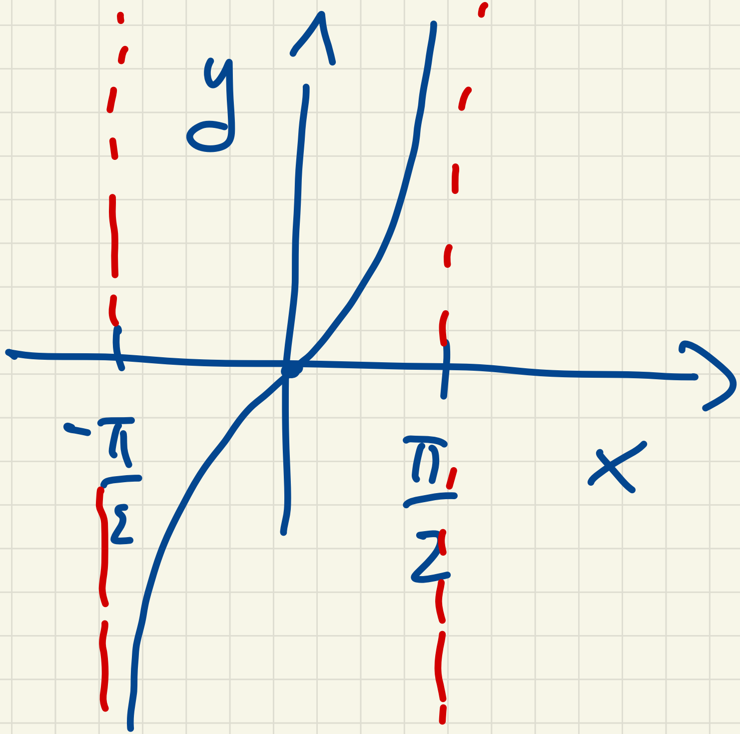
$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\arctan(-1) =$ "L'UNICA $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ TALE CHE $\tan x = -1$"

$= $ "L'UNICA $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ T.C.

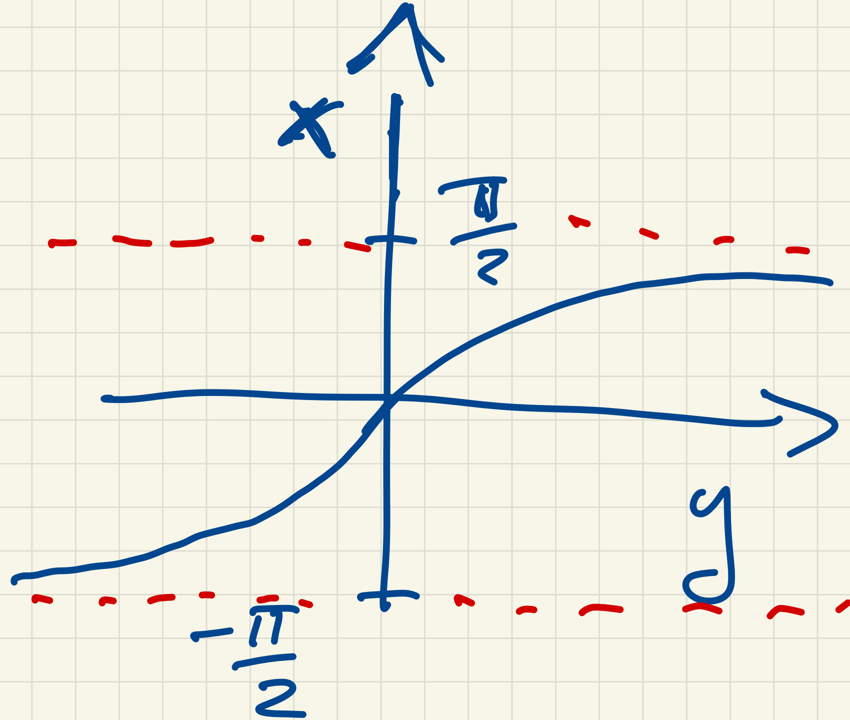
$\tan(-x) = 1$"

$$= -\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$



TANGENTE



ARCO TANGENTE

CAPITOLO III

"SUCCESSIONI

E

SERIE"

III . 1 LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

DEFINIZIONE UNA <u>SUCCESSIONE</u>

È UNA FUNZIONE $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

O PIÙ IN GENERALE

$$f : \{ n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- SI TRATTA DI FUNZIONI LA CUI VARIABILE È UN NUMERO NATURALE

NOTAZIONE CHIAMEREMO SEMPRE $n \in \mathbb{N}$ LA VARIABILE DI UNA SUCCESSIONE.

ESEMPIO

1. $f(n) = \dfrac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

2. $f(n) = \dfrac{n-1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3. $f(n) = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

IN REALTÀ USEREMO UN'ALTRA NOTAZIONE PER INDICARE L'INSIEME DI TUTTI I VALORI DI UNA SUCCESSIONE

NOTAZIONE

$$\boxed{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}} \subseteq \mathbb{R}$$

DOVE a_n È L'N-ESIMO VALORE ASSUNTO DALLA SUCCESSIONE

ES. $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $a_n = 2^n$

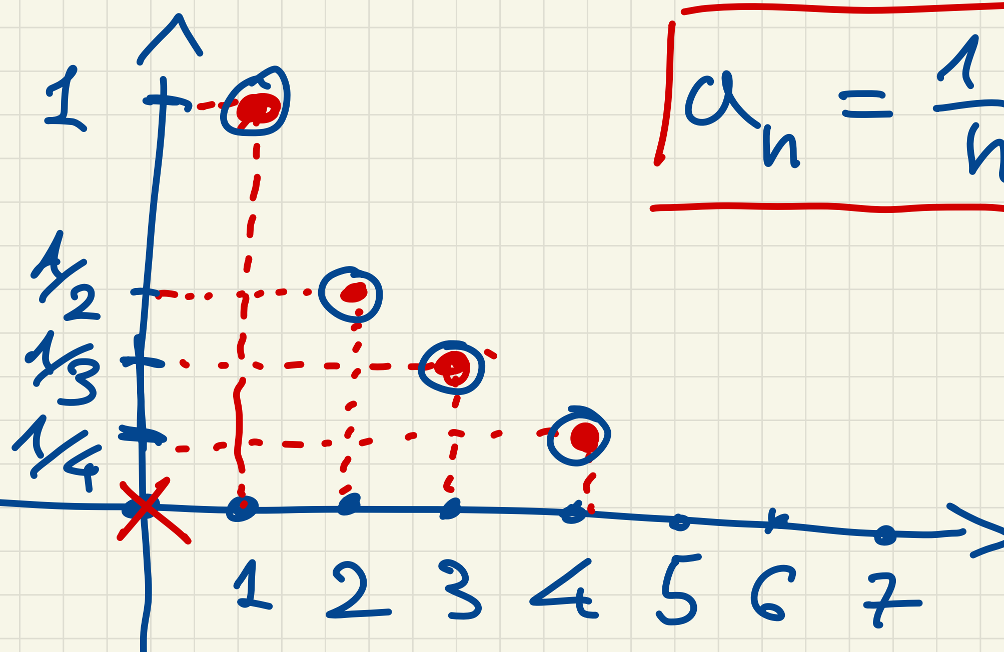
$\boxed{\text{OSS.}}$ SI PUÒ DISEGNARE IL GRAFICO DI UNA SUCCESSIONE, CHE SARÀ FORMATO DA "PUNTI ISOLATI"

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3}$

$a_4 = 1/4$



$$\boxed{a_n = \frac{1}{n}}$$

DOMANDA: COSA CI INTERESSA SAPERE DI UNA SUCCESSIONE?

CI INTERESSA SOPRATTUTTO SAPERE SE QUANDO "n DIVENTA MOLTO GRANDE", I VALORI a_n "SI AVVICINANO AD UN VALORE LIMITE"

QUESTO CI PORTA AL CONCETTO MATEMATICO DI **LIMITE**

CERCHIAMO UNA DEFINIZIONE RIGOROSA DI QUESTO CONCETTO

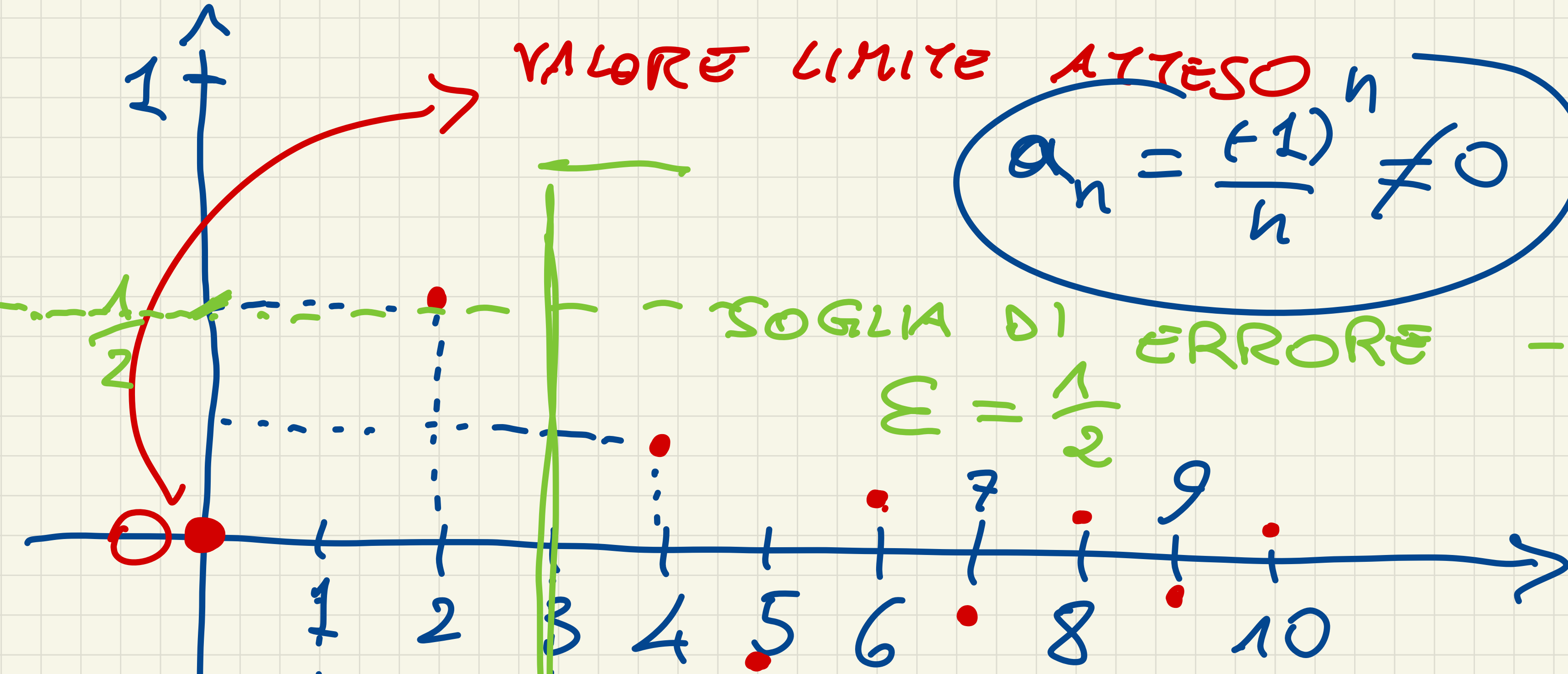
$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

OVVERO

$a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$, $a_6 = \frac{1}{6}$

E COSÌ VIA



$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \neq 0$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

DOMANDA

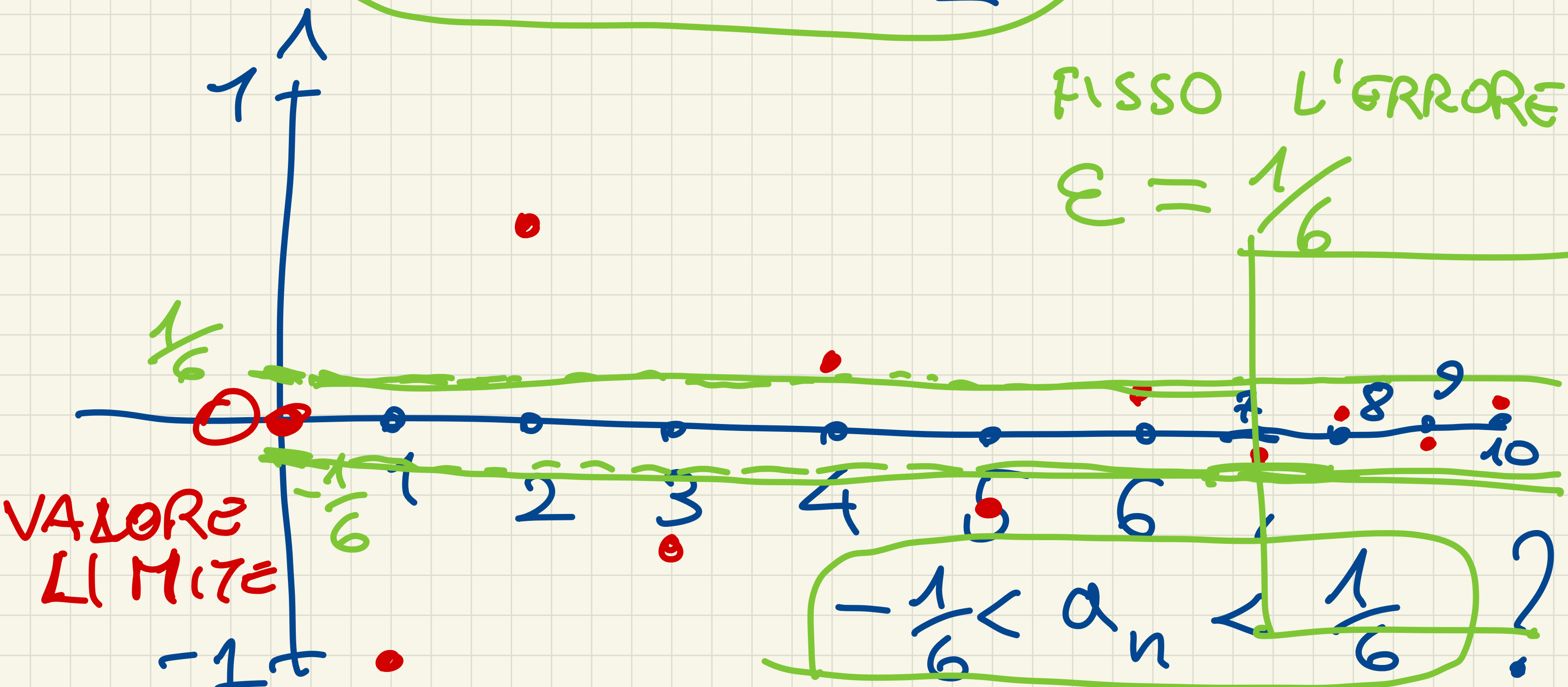
QUANTI SONO I TERMINI a_n CHE SI DISCOSTANO DAL VALORE ATTESO 0 PER AL PIÙ ε

PER OGNI $n \geq 3$, SI HA CHE

$$-\frac{1}{2} < a_n < \frac{1}{2}$$

FISSO L'ERRORE

$$\varepsilon = \frac{1}{6}$$



$$-\frac{1}{6} < a_n < \frac{1}{6} \; ?$$

PER OGNI $n \geq 7$ SI HA

$$-\frac{1}{6} < a_n < \frac{1}{6}$$

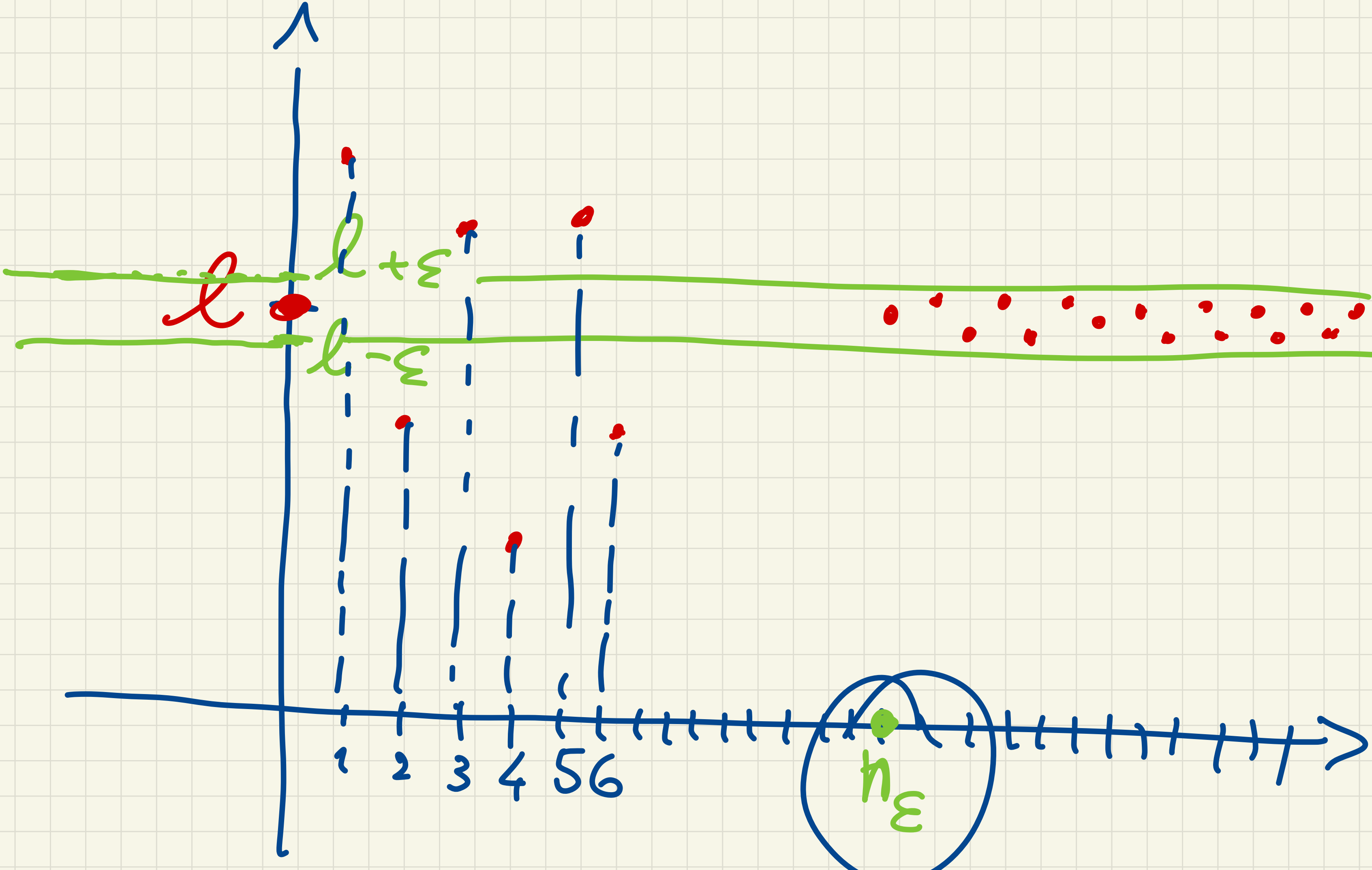
ARRIVIAMO QUINDI ALLA

DEFINIZIONE (LIMITE)

SI DICE CHE $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È

CONVERGENTE SE ESISTE $\ell \in \mathbb{R}$ T.C.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ T.C. } |a_n - \ell| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon$$



ℓ
ℓ+ε
ℓ−ε
1
2
3
4
5
6
nε

IN TAL CASO, SCRIVEREMO

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \ell}$$ = "LIMITE DI a_n PER n CHE TENDE A INFINITO È UGUALE A ℓ"

(PRECISAZIONE METTO $n \to \infty$ PERCHÉ $n \in \mathbb{N}$, QUINDI $n \geq 0$ ED ALLORA C'È UN UNICO "INFINITO")

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ DIRE SE

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$ È CONVERGENTE

E SE SÌ CALCOLARE IL SUO LIMITE USANDO LA DEFINIZIONE.

SOL.

OSSERVIAMO CHE

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-1-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

OVVERO

$$a_n = 1 - \frac{2}{n+1} \xrightarrow{?} 0$$

PER $n \to \infty$, $a_n \xrightarrow{?} 1$

QUINDI SEMBREREBBE CHE

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

DIMOSTRIAMOLO :

DEVO DIMOSTRARE CHE

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |a_n - 1| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon}$$

OVVERO CHE

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$$-\varepsilon < \frac{n-1}{n+1} - 1 < \varepsilon$$

RICORDA

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

QUINDI' FISSO $\varepsilon > 0$, VOGLIO SAPERE PER QUALI n VALE

$$1-\varepsilon < \frac{n-1}{n+1} < 1+\varepsilon$$

VERA $\forall n \in \mathbb{N}$

PERCHÉ

$$\frac{n-1}{n+1} < 1 \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DEVO SOLO OCCUPARMI DI

$$1-\varepsilon < \frac{n-1}{n+1}$$

... RISOLVIAMOLA!

$$\boxed{1-\varepsilon < \frac{n-1}{n+1}} \iff (n+1)(1-\varepsilon) < \frac{(n-1)}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)}$$

$$\iff (n+1)(1-\varepsilon) < n-1$$

$$\iff n(1-\varepsilon)+1-\varepsilon < n-1$$

$$\iff 1-\varepsilon+1 < \cancel{n}-n(\cancel{1}-\varepsilon)$$

$$\iff 2-\varepsilon < \varepsilon n$$

$$(\varepsilon>0) \iff \boxed{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} < n}$$

QUINDI RICAPITOLANDO:

FISSO $\varepsilon > 0$, PRENDO

$n_\varepsilon =$ "UN QUALSIASI NATURALE TALE $> \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$"

ALLORA PER OGNI $n \geq n_\varepsilon$, SI AVRÀ

$n \geq n_\varepsilon > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$ CHE È EQUIVALENTE

A $\quad 1-\varepsilon < \frac{n-1}{n+1} < 1+\varepsilon$

OVVERO ABBIAMO DIMOSTRATO USANDO LA DEFINIZIONE CHE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SI DICE CHE $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È DIVERGENTE A $+\infty$ SE VALE

$$\boxed{\forall M > 0, \ \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ TALE CHE } a_n > M \quad \forall n \geq n_M}$$

SI DICE INVECE CHE È DIVERGENTE A $-\infty$ SE VALE

$$\boxed{\forall M<0,\ \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ TALE CHE } a_n < M,\ \forall n \geq n_M}$$

DEFINIZIONE SI DICE CHE $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ È IRREGOLARE SE NON È NÉ CONVERGENTE NÉ DIVERGENTE.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ 1 $\quad a_n = \log_2(n+2)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ È DIVERGENTE A $+\infty$.

DEVO MOSTRARE CHE

$\forall M > 0, \ \exists n_M \in \mathbb{N}$ T.C.

$$\log_2(n+2) > M$$

PARTIAMO OSSERVANDO CHE

$$\log_2(n+2) > M \iff 2^{\log_2(n+2)} > 2^M$$

ESPONENZIALE
È CRESCENTE

$$\iff n+2 > 2^M$$

$$\iff n > 2^M - 2$$

QUINDI SCEGLIENDO

$n_M =$ " UN QUALSIASI NUMERO NATURALE PIÙ GRANDE DI $2^M - 2$ "

SI AVRÀ CHE

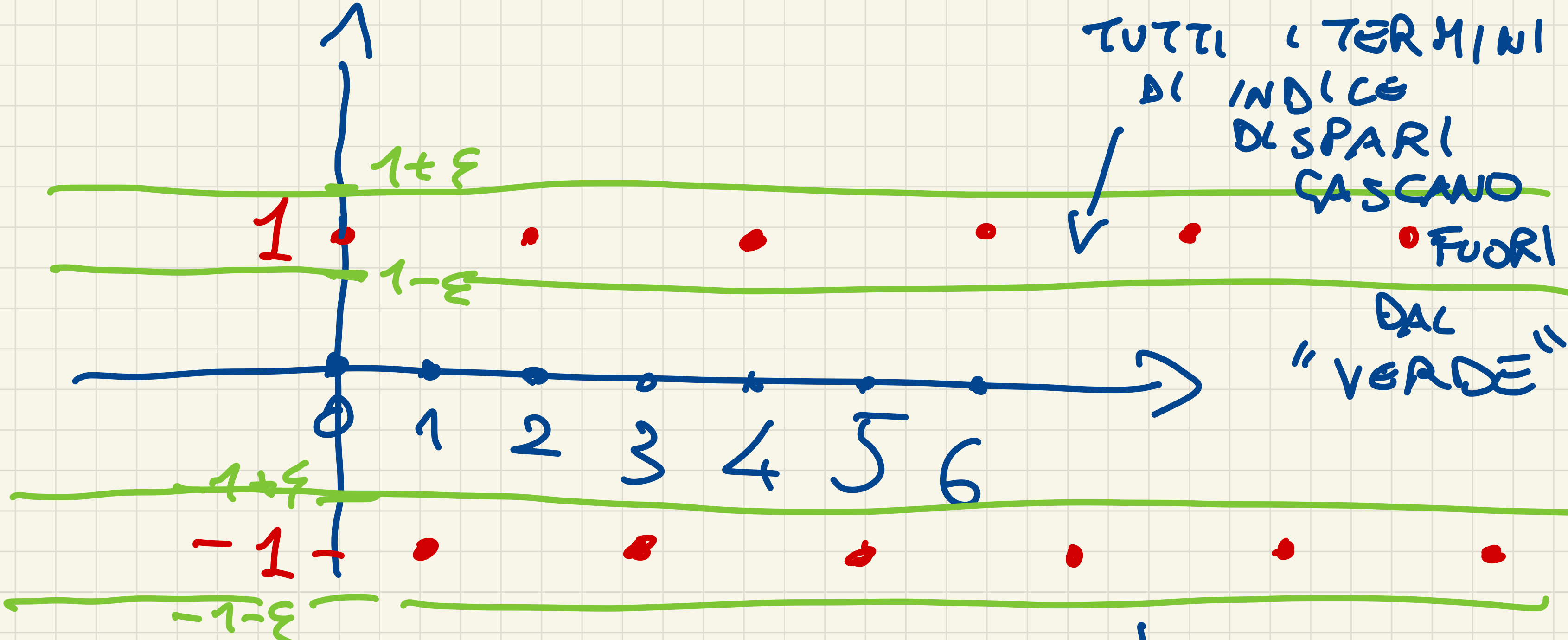
$\forall n \geq n_M$ ALLORA

$n > 2^M - 2 \iff a_n = \log_2(n+2) > M$

OVVERO HO VERIFICATO LA DEFINIZIONE DI "a_n DIVERGE A $+\infty$"

2) $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

È <u>IRREGOLARE</u>



$$-1 \le a_n \le 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

SE FOSSE CONVERGENTE, IL LIMITE DOVREBBE ESSERE 1 OPPURE −1

QUINDI a_n NON CONVERGE
NON DIVERGE

$\Rightarrow$ a_n È IRREGOLARE.

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SI DICE CHE ESSA È:

- MONOTONA CRESCENTE SE VALE

$$a_n \leq a_{n+1} \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

• MONOTONA DECRESCENTE SE VALE

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ è

MONOTONA DECRESCENTE, INFATTI

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

QUINDI PER OGNI $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \cancel{1} + \frac{1}{n+1} \geq \cancel{1} + \frac{1}{n+2}$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2}$$

$$\iff \cancel{n} + 1 \leq \cancel{n} + 2$$

$$\iff 1 \leq 2 \quad \underline{\text{OK}}$$

QUINDI a_n È DECRESCENTE

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, SI DICE CHE È:

- LIMITATA SUPERIORMENTE SE $\exists M \in \mathbb{R}$ T.C. $a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- LIMITATA INFERIORMENTE SE $\exists m \in \mathbb{R}$ T.C. $a_n \geq m, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- LIMITATA SE È SIA LIMITATA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE

NEL CASO IN CUI $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SIA LIMITATA SUPERIORMENTE, SI PONE

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

= "IL PIÙ PICCOLO MAGGIORANTE DELL'INSIEME $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$"

NEL CASO IN CUI $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SIA LIMITATA INFERIORMENTE, SI PONE

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$$

$$= \text{"IL PIÙ GRANDE DEI MINORANTI DI } \{a_n : n\in\mathbb{N}\}\text{"}$$

SI PONE

$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$ SE LA SUCCESSIONE NON È LIMITATA SUPERIORMENTE

$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty$ SE LA SUCCESSIONE NON È LIMITATA INFERIORMENTE

III. 2 PROPRIETÀ DEI LIMITI

PROPOSIZIONE (UNICITÀ DEL LIMITE) SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ CONVERGENTE, TALE CHE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = l_2 .$$

ALLORA $\boxed{l_1 = l_2}$.

<u>DIM.</u>

USANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE CON l_1 E l_2, ABBIAMO

I $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$|a_n - \ell_1| < \varepsilon, \quad \underbrace{\forall n \geq n_\varepsilon}$$

II $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$|a_n - \ell_2| < \varepsilon, \quad \underbrace{\forall n \geq m_\varepsilon}$$

SE FISSO

$$k_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$$

ALLORA $\boxed{\forall n \geq k_\varepsilon}$ AVRÒ

IN CONTEMPORANEA (I) E (II)

CIOÈ

$$|a_n - \ell_1| < \varepsilon \ \ \text{E} \ \ |a_n - \ell_2| < \varepsilon$$

QUINDI IN PARTICOLARE

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\underbrace{\ell_1 - a_n} + \underbrace{a_n - \ell_2}|$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon$$

OVVERO

$$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \ , \ \forall \varepsilon > 0 .$$

SICCOME $\varepsilon > 0$ È ARBITRARIO, L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE

$$l_1 = l_2 \qquad \blacksquare$$