ANALISI MATEMATICA A

– LEZIONE 9 –

LORENZO BRASCO

28 OTTOBRE 2020

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ SI CONSIDERI LA SUCCESSIONE $a_n = 2^{1/n} = \sqrt[n]{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$. DIRE SE È CONVERGENTE ED IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE IL SUO LIMITE.

SOL.

OSSERVIAMO CHE $\frac{1}{n} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0$

OVVERO $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

VERIFICA SIA $\varepsilon > 0$, DEVO

DIMOSTRARE CHE ESISTE $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

TALE CHE $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$

OVVERO TALE CHE

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

FISSATO $\varepsilon > 0$, ANDIAMO A VEDERE PER QUALI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ VALE

$$\underbrace{-\varepsilon < \overbrace{\frac{1}{n} < \varepsilon}}_{\text{SEMPRE VERA}}$$

, MENTRE

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff 1 < \varepsilon n \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$$

OVVERO HO DIMOSTRATO CHE

FISSATO $\varepsilon > 0$, SE SCELGO

$n_\varepsilon =$ " UN NUMERO NATURALE MAGGIORE DI $1/\varepsilon$ "

ALLORA $\forall n \geq n_\varepsilon$ SI HA

$\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon \leq n$ OVVERO $\frac{1}{\varepsilon} < n$

CHE È EQUIVALENTE A

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_\varepsilon$$

QUINDI HO VERIFICATO CHE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

TORNIAMO A $a_n = 2^{1/n} \xrightarrow{?} 2^0 = 1$

QUINDI SOSPETTO CHE

$$\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$$

DIMOSTRIAMOLO : DEVO PROVARE CHE

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $|2^{1/n} - 1| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$

FISSATO $\varepsilon > 0$ VOGLIO SAPERE PER QUALI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ VALE

$$|2^{1/n} - 1| < \varepsilon \iff \overbrace{1 - \varepsilon < 2^{1/n}}^{\text{SEMPRE VERA}} \underbrace{< 1 + \varepsilon}$$

OSSERVO CHE

$$2^{\alpha} \geq 1 \quad \text{PER OGNI } \alpha \geq 0$$

QUINDI

$$\boxed{2^{1/n} \geq 1 > 1 - \varepsilon \quad \text{PER OGNI } n \geq 1}$$

$$2^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon \iff \log_2\left(2^{\frac{1}{n}}\right) < \log_2(1+\varepsilon)$$

($\log_2$ è UNA FUNZIONE MONOTONA CRESCENTE)

$$\iff \frac{1}{n} < \log_2(1+\varepsilon)$$

$$\iff \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)} < n$$

OVVERO SE DEFINISCO

$n_\varepsilon =$ "UN NUMERO NATURALE MAGGIORE DI $\dfrac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$"

ALLORA

$\forall n \geq n_\varepsilon$, ABBIAMO

$$n \geq n_\varepsilon > \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)} \iff 2^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$$

COME VOLEVO $\blacksquare$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ TALE CHE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

USANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE, DIMOSTRARE CHE

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$ TENDE A 0 PER $n\to\infty$.

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE. ALLORA ESSA È LIMITATA.

<u>DIM</u>.

CHIAMO ℓ IL LIMITE DELLA SUCCESSIONE.

PRENDO $\varepsilon = 1$, DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$|a_n - \ell| < 1 \quad , \quad \forall\, n \geq n_1$$

OVVERO

$$\underbrace{l-1}_{} < a_n < \underbrace{l+1}_{} \,, \quad \forall n \geq n_1$$

QUINDI L'INSIEME DEI TERMINI

$$\{ a_n : \underline{n \geq n_1} \} \text{ È } \underline{\text{LIMITATO}}$$

MI RESTA DA CONSIDERARE I PRIMI n_1 TERMINI

E DIMOSTRARE CHE ANCHE QUESTI FORMANO UN INSIEME LIMITATO

PRENDO

$$c = \min\{a_0, \dots, a_{n_1-1}\}$$

$$C = \max\{a_0, \dots, a_{n_1-1}\}$$

ALLORA AVRÒ ANCHE

$$\boxed{c \leq a_n \leq C \quad \text{PER OGNI} \quad , \; 0 \leq n \leq n_1 - 1}$$

QUINDI IN CONCLUSIONE

SE SCELGO

$$m = \min\{c, l-1\}$$

$$M = \max\{C, l+1\}$$

ALLORA ABBIAMO CHE

$$m \leq a_n \leq M \qquad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

CIOÈ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È LIMITATA ☒

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ (PERMANENZA DEL SEGNO "SOFT")

SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE TALE CHE

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad a_n \geq 0 \,, \ \forall n \geq n_0$$

ALLORA, SE $a_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \ell$, DEVE AVERSI

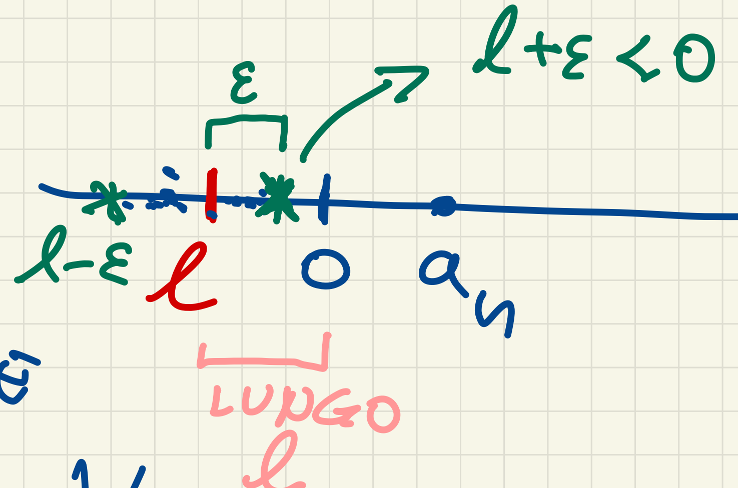
$$\ell \geq 0 \,.$$

DIM.

PROCEDIAMO PER ASSURDO, SUPPONIAMO QUINDI CHE SIA

$$\ell < 0.$$

SCELGO $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$



$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$|a_n - \ell| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon$$

OVVERO

$$\ell - \varepsilon < \underbrace{a_n < \ell + \varepsilon} \,, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

OVVERO

I $\quad a_n < \ell + \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$

$$\forall n \geq n_\varepsilon$$

II D'ALTRA PARTE SAPEVAMO CHE

$a_n \geq 0$ A PARTIRE DA UN CERTO INDICE

I E II SI CONTRADDICONO

QUINDI IN CONCLUSIONE DEVE VALERE $\ell \geq 0$. $\boxtimes$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

TALI CHE

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq b_n, \ \forall n \geq n_0$

ALLORA SE ENTRAMBE LE SUCCESSIONI CONVERGONO, SI HA CHE

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$\boxed{\text{PROPOSIZIONE}}$ (PERMANENZA DEL SEGNO "STRONG")

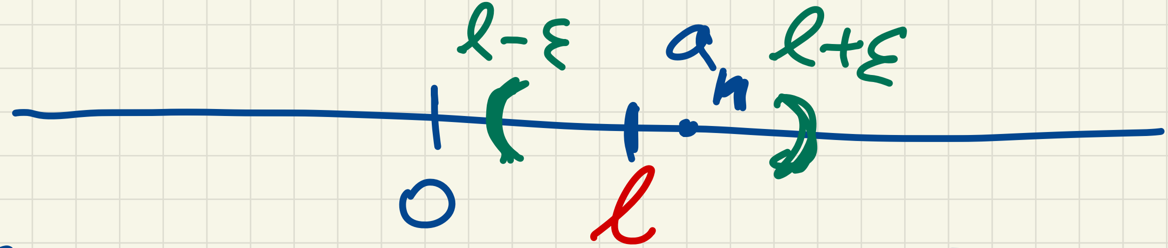
SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ TALE CHE

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n > 0$$ (SEGNO STRETTO!)

ALLORA $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$a_n > 0, \text{ PER OGNI } n \geq n_0$$

DIM.



SCELGO $\varepsilon > 0$ IN MODO CHE

$l - \varepsilon > 0$, PER ESEMPIO $\boxed{\varepsilon = \frac{l}{2}}$

È IMPORTANTE CHE $l > 0$

DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE

$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ T.C.

$$l - \frac{l}{2} = l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

OVVERO $a_n > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} > 0, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

$\boxed{\text{OSS.}}$ OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE LA DIMOSTRAZIONE DELLA "PERMANENZA DEL SEGNO STRONG" NON FUNZIONA SE $\ell = 0$.

PUÒ ESSERE VERO COMUNQUE IL RISULTATO PER $\ell = 0$?

CIOÈ SE $a_n \longrightarrow 0$ PER $n \to \infty$, POSSO DIRE QUALCOSA SUL SEGNO DI

a_n ? $\boxed{\text{NO}}$

IN GENERALE NO, ESEMPIO

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$ TENDE A 0,

MA I SUOI TERMINI NON ASSUMONO MAI SEGNO COSTANTE) A PARTIRE DA UN CERTO INDICE

$\boxed{\text{OSS.}}$ IN GENERALE, SE

$$a_n > 0, \quad \forall n \geq n_0$$

E $a_n \longrightarrow \ell$,

<u>NON</u> POTETE DIRE CHE $\ell > 0$

MA SOLTANTO CHE $\ell \geq 0$.

<u>ESEMPIO</u> $a_n = \dfrac{1}{n} > 0$

MA $a_n \longrightarrow 0$

ALGEBRA DEI LIMITI

SUPPONIAMO CHE

$$a_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} L_1$$

$$b_n \longrightarrow L_2$$

COSA POSSIAMO DIRE DI

$$a_n + b_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \,?$$

$$a_n b_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \,?$$

$$a_n / b_n \longrightarrow \,?$$

DOBBIAMO FARE UN PO' DI ATTENZIONE PER RISPONDERE A QUESTE DOMANDE.

IN PARTICOLARE, DOVREMO DISTINGUERE UN PO' DI CASI

- I CASO "CONVERGENTE - CONVERGENTE"

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \quad E \quad \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

CON $|L_1| < +\infty$ E $|L_2| < +\infty$

ALLORA VALE

① $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_1 + L_2$

② $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L_1 - L_2$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{L_1}{L_2} & \text{se } L_2 \neq 0 \\ ? & \text{se } \boxed{L_2 = 0} \end{cases}$

④ $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = L_1^{L_2}$ se $L_1 > 0$.

⑤ $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = L_1 L_2$

• II CASO "CONVERGENTE - DIVERGENTE"

$\lim_{n \to \infty} a_n = L_1$ E $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$

CON

$|L_1| < +\infty$

⑥ $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty$

7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

8) $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty, & \text{SE } L_1 > 0 \\ -\infty, & \text{SE } L_1 < 0 \\ ?, & \boxed{\text{SE } L_1 = 0} \end{cases}$$

• III CASO "DIVERGENTE - DIVERGENTE"

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{E} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

ALLORA

9) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

10) $$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = ?$$

(11) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$

(12) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = ?$

ESERCIZIO X CASA PROVATE A DIMOSTRARE LE REGOLE APPENA ENUNCIATE (TRANNE QUELLE CON ? OVVIAMENTE)

QUELLE CON ? SONO QUELLE CHE SI CHIAMANO FORME INDETERMINATE

ESSE SONO QUINDI:

$$\frac{0}{0}\ ,\quad 0\cdot\infty\ ,\quad +\infty-\infty\ ,\quad \frac{\infty}{\infty}$$

A QUESTE VANNO AGGIUNTE

$$1^{\infty}\ ,\quad 0^{0}\ ,\quad \infty^{0}$$

SUGGERIMENTO COME TENERE A MENTE LE ULTIME 3 ?

$$1^{\infty} = 2^{\log_2(1^{\infty})} = 2^{\infty \cdot \log_2 1} = 2^{\underbrace{\infty \cdot 0}}$$

$$0^{0} = 2^{\log_2 0^{0}} = 2^{0 \cdot \log_2 0} = 2^{\underbrace{0 \cdot \infty}}$$

$$\infty^{0} = 2^{\log_2 \infty^{0}} = 2^{0 \log_2 \infty} = 2^{\underbrace{0 \cdot \infty}}$$

(NON HA NESSUN SENSO RIGOROSO)

ESERCIZIO CALCOLARE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{3n^3+4n^2+1}$$

SOL.

CI SONO VARIE FORME INDETERMINATE IN GIOCO

n^3-n È DEL TIPO $+\infty-\infty$

E C'È ANCHE IL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

COME FACCIO? CERCO DI "FAR CONTARE" IL TERMINE PIÙ GRANDE IN GIOCO, OVVERO

$$\frac{n^3-n}{3n^3+4n^2+1} = \frac{\cancel{n^3}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}$$

OSSERVIAMO CHE

$1 - \frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$ SE $n \to \infty$

$3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} \longrightarrow 3$ SE $n \to \infty$

$\frac{4}{n} \to 0 \qquad \frac{1}{n^3} \to 0$

QUINDI

$$\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}}$$

NON È PIÙ UNA FORMA INDETERMINATA

OVVERO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{3n^3+4n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{1}{3} \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/2}-3n+7}{n^3+\sqrt{n}-3n^2} = ?$$

SOL.

ANCHE QUA CI SONO UN PAIO DI FORME INDETERMINATE, OVVERO

$+\infty - \infty$ E $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2} = \frac{n^{5/2}\left(1 - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}\right)}$$

$$\frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$$= \frac{\cancel{n^{5/2}}}{n^{\cancel{3}\,\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}\right)}$$

$$3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}}{1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}}$$

$$1 - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}} \longrightarrow 1$$

$$1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n} \longrightarrow 1$$

$$\longrightarrow 0 \cdot 1 = 0$$

OVVERO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2} = 0$$ ☒

$\boxed{\text{OSS.}}$ $5/2 < 3$ ED IL LIMITE PRECEDENTE FA 0 ....

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = ?$

SOL.

$\sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty$ SE $n \to \infty$

$\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$ SE $n \to \infty$

QUINDI SI TRATTA DI UNA FORMA $+\infty - \infty$

DA DOVE NASCE LA DIFFICOLTÀ DEL LIMITE? DALLA PRESENZA DELLA RADICE QUADRATA

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

NON C'E' FORMA INDETERMINATA

$\boxed{\text{RICORDA}}$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \longrightarrow \frac{1}{+\infty}=0$$

IN CONCLUSIONE, ABBIAMO CHE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ (x CASA)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\,?$$

III . 3 EQUIVALENZE ASINTOTICHE ED O-PICCOLI

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, SI DICE CHE

a_n È ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTE A b_n SE VALE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

IN TAL CASO, SCRIVIAMO

$$\boxed{a_n \sim b_n \quad \text{PER } n \to \infty}$$

ESEMPIO $a_n = n^2+7$

$b_n = n^2-n$

SI HA $a_n \sim b_n$ PER $n \to \infty$

INFATTI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7}{n^2-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+7/n^2)}{\cancel{n^2}(1-1/n)} = \frac{1}{1} = 1$$

DEFINIZIONE (O-PICCOLO)

SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

SI DICE CHE a_n È O-PICCOLO DI b_n SE VALE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

IN TAL CASO, SCRIVEREMO

$$\boxed{a_n = o(b_n) \text{ PER } n\to\infty}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $a_n = n^2 + 7$

$b_n = n^3 - n$

ALLORA $a_n = o(b_n)$ PER $n \to \infty$

INFATTI

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+7}{n^3-n} = 0$$

(RACCOGLIERE n^2 SOPRA, n^3 SOTTO)