Analisi Matematica B
– *Lezione 11* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 7 Aprile 2020

Dovevamo terminare la dimostrazione del

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ *aperto e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione* C^2 *su* A

Sia $\mathbf{x}_0 \in A$ *un punto critico non degenere di* f

1. *se*

$$\boxed{Hf(\mathbf{x}_0) \text{ è definita positiva}}$$

allora $\mathbf{x}_0$ è **punto di minimo locale**

2. *se*

$$\boxed{Hf(\mathbf{x}_0) \text{ è definita negativa}}$$

allora $\mathbf{x}_0$ è **punto di massimo locale**

3. *se*

$$\boxed{Hf(\mathbf{x}_0) \text{ è indefinita}}$$

allora $\mathbf{x}_0$ è **punto sella**

Dimostrazione (fine)

3. Supponiamo infine che $Hf(\mathbf{x}_0)$ sia indefinita
   - in base alla definizione esistono $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tali che

     $$\langle Hf(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle > 0 \qquad \text{e} \qquad \langle Hf(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle < 0$$

   - nello sviluppo di Taylor di ordine 2, prendiamo allora punti della forma

     $$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{w}$$

- nel primo caso abbiamo

$$f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\langle Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v} - \mathbf{x}_0\rangle$$
$$+ o(|\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v} - \mathbf{x}_0|^2), \qquad \text{se } t \to 0.$$

ovvero

$$f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{t^2}{2}\underbrace{\langle Hf(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}_{>0} + o(t^2), \qquad \text{se } t \to 0.$$

- nel secondo caso, in modo simile si ha

$$f(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{w}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{t^2}{2}\underbrace{\langle Hf(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle}_{<0} + o(t^2), \qquad \text{se } t \to 0$$

- quindi lungo la direzione $\mathbf{v}$, la funzione f ha un minimo locale in $\mathbf{x}_0$ (allontanandosi da $\mathbf{x}_0$, i valori di f crescono)
- ...ma lungo la direzione $\mathbf{w}$, la funzione f ha un massimo locale in $\mathbf{x}_0$ (allontanandosi da $\mathbf{x}_0$, i valori di f decrescono)
- $\mathbf{x}_0$ è punto critico che non è ne' massimo ne' minimo
- $\mathbf{x}_0$ è punto sella

La dimostrazione è conclusa.

Commento

Il precedente risultato è molto importante perché riconduce il problema **analitico** di determinare la natura di un punto critico $\mathbf{x}_0$ non degenere, a quello **algebrico** di determinare la segnatura della corrispondente matrice hessiana $Hf(\mathbf{x}_0)$

Quest'ultimo problema abbiamo visto che è particolarmente semplice per matrici 2×2

Per funzioni di $N = 2$ variabili, dovrebbe essere tutto "abbastanza" semplice. Si ha infatti il...

Corollario (classificazione per $N = 2$)

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ *aperto e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione* C^2 *su* A

Sia $(x_0, y_0) \in A$ *un* <u>*punto critico non degenere*</u> *di* f

1. *se*

$$\boxed{\det Hf(x_0, y_0) > 0 \quad e \quad \mathrm{tr} Hf(x_0, y_0) > 0}$$

   allora (x_0, y_0) è **punto di minimo locale**

2. *se*

$$\boxed{\det Hf(x_0, y_0) > 0 \quad e \quad \mathrm{tr} Hf(x_0, y_0) < 0}$$

   allora (x_0, y_0) è **punto di massimo locale**

3. *se*

$$\boxed{\det Hf(x_0, y_0) < 0}$$

   allora (x_0, y_0) è **punto sella**

Esercizio

Trovare i punti critici della seguente funzione

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + x\,y,$$

e classificarli, ovvero dire se si tratta di punti di minimo locale, punti di massimo locale o punti sella.

Soluzione

- f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed ivi derivabile
- dobbiamo intanto trovare tutti i punti (x, y) tali che

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (0, 0)$$

- dal momento che $f(x,y) = x^3 + x\,y - y^3$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3\,x^2 + y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 3\,y^2$$

- dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3\,x^2 + y & = & 0 \\ x - 3\,y^2 & = & 0 \end{cases}$$

- per risolvere questo sistema, usiamo la prima equazione per trovare $y = -3\,x^2$
- sostituiamo nella seconda

- arriviamo a

$$\begin{cases} y & = & -3\,x^2 \\ x - 3\,(-3\,x^2)^2 & = & 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} y & = & -3\,x^2 \\ x - 27\,x^4 & = & 0 \end{cases}$$

- la seconda equazione può essere riscritta come

$$x\,(1 - 27\,x^3) = 0$$

- quindi otteniamo le soluzioni possibili

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

- sostituendo queste due possibilità nella prima equazione $\boxed{y = -3\,x^2}$, si trova

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = -3\,(0)^2 = 0$$

oppure

$$x = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = -3\,\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}$$

- in conclusione, abbiamo ottenuto

$$P_1 = (0,0) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

che sono gli unici punti critici della funzione f

- cerchiamo adesso di classificarli, usando il *Corollario di classificazione per* $N = 2$
- osserviamo che la funzione f in esame è C^2 su $\mathbb{R}^2$, quindi effettivamente possiamo usare questo risultato
- ricordando che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3\,x^2 + y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 3\,y^2$$

- otteniamo che la matrice hessiana è data da

$$Hf(x, y) = \left[\begin{array}{cc} 6\,x & 1 \\ 1 & -6\,y \end{array} \right]$$

- per il punto critico $P_1 = (0,0)$, si ha

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- si osservi che

$$\det Hf(0,0) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$$

- quindi in base al *Corollario di classificazione per* $N = 2$, abbiamo che $(0,0)$ è **punto sella**

- per il punto critico $P_1 = (1/3, -1/3)$, si ha

$$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 6 \cdot \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & -6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- si osservi che

$$\det Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

- inoltre

$$\mathrm{tr} Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 2 + 2 = 4 > 0$$

- quindi in base al *Corollario di classificazione per* $N = 2$, abbiamo che $(0, 0)$ è **punto di minimo locale**

Esercizio

Trovare i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 4\,x\,y,$$

e classificarli, ovvero dire se si tratta di punti di minimo locale, punti di massimo locale o punti sella

Soluzione

- f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed ivi derivabile
- troviamo i punti critici, ovvero le soluzioni (x,y) di

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (0,0)$$

- dal momento che $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4\,x\,y$, si ha
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4\,x^3 + 4\,y$$
e
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4\,y^3 + 4\,x$$

- dobbiamo quindi risolvere il sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} 4\,x^3 + 4\,y & = & 0 \\ 4\,y^3 + 4\,x & = & 0 \end{array}\right.$$

- per risolvere questo sistema, usiamo la prima equazione per trovare $y = -x^3$
- sostituiamo nella seconda e semplifichiamo il coefficiente 4

- troviamo

$$\begin{cases} y = -x^3 \\ -x^9 + x = 0 \end{cases}$$

- la seconda equazione conduce a

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x^8 = 1$$

- ovvero

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x = 1 \qquad \text{oppure} \qquad x = -1$$

- sostituendo, possiamo trovare il valore di y ed ottenere i tre punti critici

$$P_1 = (0, 0), \qquad P_2 = (1, -1), \qquad P_3 = (-1, 1)$$

- cerchiamo adesso di classificarli, usando il *Corollario di classificazione per* $N = 2$
- osserviamo che la funzione f in esame è C^2 su $\mathbb{R}^2$, quindi effettivamente possiamo usare questo risultato
- ricordando che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4\,x^3 + 4\,y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4\,y^3 + 4\,x$$

- otteniamo che la matrice hessiana è data da

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12\,x^2 & 4 \\ 4 & 12\,y^2 \end{bmatrix}$$

- per il punto critico $P_1 = (0,0)$, si ha

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- si osservi che

$$\det Hf(0,0) = 0 \cdot 0 - 4 \cdot 4 = -16 < 0$$

- quindi in base al *Corollario di classificazione per* $N = 2$, abbiamo che $(0,0)$ è **punto sella**

- per il punto critico $P_1 = (1, -1)$, si ha

$$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 12 \cdot (1)^2 & 4 \\ 4 & 12 \cdot (-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- si osservi che

$$\det Hf(1,-1) = 12 \cdot 12 - 4 \cdot 4 = 144 - 16 > 0$$

- inoltre si ha

$$\mathrm{tr} Hf(1,-1) = 12 + 12 = 24 > 0$$

- quindi in base al *Corollario di classificazione per* $N = 2$, abbiamo che $(1, -1)$ è **punto di minimo locale**
- in modo simile, si trova che anche $(-1, 1)$ è **punto di minimo locale**

IV.4 Punti critici degeneri

- Fin'ora ci siamo occupati di classificare i punti critici **non degeneri**, ovvero tali che

$$\det Hf(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

- nel caso di punti critici degeneri...sono dolori!
- partiamo con un esempio molto semplice, che ci mostra cosa può succedere...

Esercizio

Si verifichi che $(0,0)$ *è punto critico degenere per le funzioni*

$$f(x,y) = x^4 + y^4, \quad g(x,y) = -x^4 - y^4, \quad h(x,y) = x^4 - y^4$$

ed è

- *punto di minimo locale per* f
- *punto di massimo locale per* g
- *punto sella per* h

Soluzione

- I gradienti sono dati da

$$\nabla f(x,y) = (4\,x^3, 4\,y^3) \qquad \nabla g(x,y) = (-4\,x^3, -4\,y^3)$$

$$\nabla h(x,y) = (4\,x^3, -4\,y^3)$$

- si vede facilmente che effettivamente $(0,0)$ annulla tutti e 3 i gradienti precedenti
- quindi $(0,0)$ è punto critico per f, g e h
- mostriamo che è degenere, calcolando intanto le matrici hessiane

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12\,x^2 & 0 \\ 0 & 12\,y^2 \end{bmatrix}$$

$$Hg(x,y) = \begin{bmatrix} -12\,x^2 & 0 \\ 0 & -12\,y^2 \end{bmatrix}$$

$$Hh(x,y) = \begin{bmatrix} 12\,x^2 & 0 \\ 0 & -12\,y^2 \end{bmatrix}$$

- calcolate nel punto critico $(0,0)$ danno...

- ...voilà!

$$Hf(0,0) = Hg(0,0) = Hh(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- il punto critico è degenere!
- per determinarne la natura, dobbiamo ricorrere ad argomenti di tipo “artigianale”
- per quanto riguarda f, osserviamo che

$$f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$$

ovvero $(0,0)$ è punto di minimo locale per f (addirittura, punto di minimo <u>globale</u>)

- per quanto riguarda g, osserviamo che

$$g(x,y) = -x^4 - y^4 \leq 0 = g(0,0)$$

ovvero $(0,0)$ è punto di massimo locale per g (addirittura, punto di massimo <u>globale</u>)

- infine, per quanto riguarda la funzione h, osserviamo che

$$h(x,0) = x^4 \qquad \text{e} \qquad h(0,y) = -y^4$$

ovvero

a. la restrizione di h all'asse delle x ha **minimo** nell'origine

b. la restrizione di h all'asse delle y ha **massimo** nell'origine

Quindi $(0,0)$ per h è un punto sella!

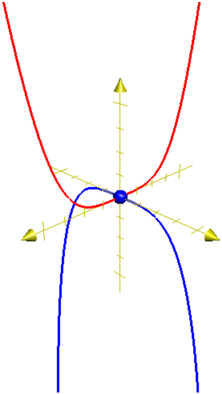

Figura: Il grafico di $h(x, y) = x^4 - y^4$ ristretta all'asse delle x (in rosso) e quello di h ristretta all'asse delle y. Il pallino blu è il punto critico $(0, 0)$.

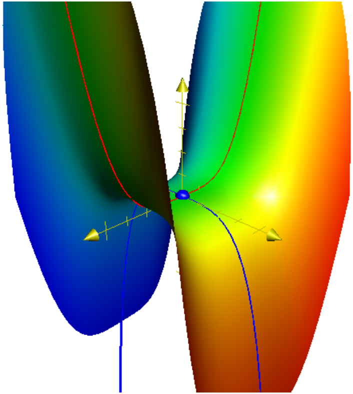

Figura: Il grafico completo di $h(x, y) = x^4 - y^4$.

• L'esercizio precedente chiarisce che per i punti critici degeneri, può succedere di tutto e non ci sono condizioni sufficienti di classificazione

• In questi casi, bisognerà cercare di risolvere la situazione usando dei metodi "artigianali" per chiarire la natura del punto critico.

• I metodi più tipici sono:

1. studio della funzione in esame ristretta a particolari curve che passano dal punto critico (come per la funzione h precedente)
2. nel caso in cui il punto critico $\mathbf{x}_0$ sia anche uno zero della funzione, ovvero

$$f(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad \nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

   studio del segno di f vicino a $\mathbf{x}_0$ (come per le funzioni f e g)

Vale comunque il seguente risultato più debole

Proposizione *M.D.N* (“*Meglio di niente*”)

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ *aperto e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione* C^2 *su* A

Sia $(x_0, y_0) \in A$ *un <u>punto critico degenere</u> di* f

1. *se*

$$\boxed{\mathrm{tr} Hf(x_0, y_0) > 0}$$

   allora (x_0, y_0) **non è** *punto di massimo locale*

2. *se*

$$\boxed{\mathrm{tr} Hf(x_0, y_0) < 0}$$

   allora (x_0, y_0) **non è** *punto di minimo locale*

Esercizio

Trovare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (y - x^2)\,(y - 2\,x^2), \qquad \textit{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e classificarli

Soluzione

- f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed ivi derivabile
- troviamo tutti i punti (x,y) tali che

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (0,0)$$

- dal momento che $f(x,y) = (y - x^2)\,(y - 2\,x^2)$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2\,x\,(y - 2\,x^2) - 4\,x\,(y - x^2)\\ &= 8\,x^3 - 6\,x\,y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (y - 2\,x^2) + (y - x^2)\\ &= 2\,y - 3\,x^2\end{aligned}$$

- dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 8\,x^3 - 6\,x\,y &= 0 \\ 2\,y - 3\,x^2 &= 0 \end{cases}$$

- usiamo la seconda equazione per ricavare

$$y = \frac{3}{2}\,x^2$$

  e sostituiamo nella prima equazione

- otteniamo allora

$$\begin{cases} y & = & \frac{3}{2}\,x^2 \\ 8\,x^3 - 9\,x^3 & = & 0 \end{cases}$$

- la seconda equazione ha $x = 0$ come unica soluzione
- dalla prima otteniamo anche $y = 0$
- quindi $(0, 0)$ è l'unico punto critico della funzione in esame

- cerchiamo classificare questo punto, usando il *Corollario di classificazione per* $N = 2$
- la funzione f in esame è C^2 su $\mathbb{R}^2$, quindi effettivamente possiamo usare questo risultato
- ricordando che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8\,x^3 - 6\,x\,y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\,y - 3\,x^2$$

- otteniamo che la matrice hessiana è data da

$$Hf\,(x, y) = \begin{bmatrix} 24\,x^2 - 6\,y & -6\,x \\ -6\,x & 2 \end{bmatrix}$$

- per il punto critico $(0,0)$, si ha

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- si osservi che

$$\det Hf(0,0) = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 0$$

- il punto critico è **degenere!**
- NON possiamo usare il *Corollario di classificazione per* $N = 2$
- osserviamo che

$$\mathrm{tr} Hf(0,0) = 0 + 2 = 2 > 0$$

  quindi per la *Proposizione M.D.N*, $(0,0)$ è punto di minimo locale **oppure** punto sella

- per sciogliere il dubbio, abbiamo bisogno di studiare la funzione f intorno a $(0,0)$
- osserviamo che $f(0,0)=0$, quindi se $(0,0)$ fosse punto di minimo locale avremmo che esiste $R>0$

$$f(x,y) \geq f(0,0) = 0 \qquad \text{per ogni } (x,y) \in B_R((0,0))$$

- proviamo a vedere il segno di f intorno all'origine
- si ha che

$$f(x,y) = (y-x^2)\,(y-2\,x^2) \geq 0$$

se e solo se

$$y \geq x^2 \qquad \textbf{e} \qquad y \geq 2\,x^2$$

oppure

$$y \leq x^2 \qquad \textbf{e} \qquad y \leq 2\,x^2$$

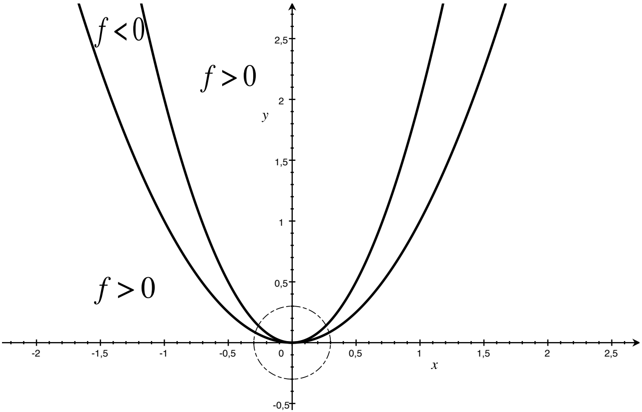

Figura: In qualsiasi palla centrata in $(0,0)$, nell'intercapedine tra i due grafici di parabola $y = x^2$ e $y = 2\,x^2$, la funzione ha segno *strettamente negativo*. Quindi $(0,0)$ non può essere di minimo locale. In definiva $(0,0)$ è punto sella.

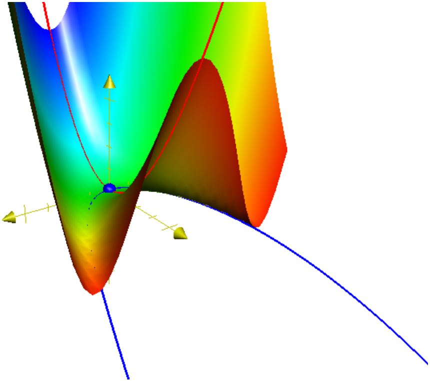

Figura: Il grafico delle funzione f, in prossimità del punto critico $(0,0)$ (pallino blu). Muovendosi lungo l'asse delle y (in rosso), nell'origine abbiamo un minimo; ma se ci muoviamo nella vallata evidenziata in blu, nell'origine c'è un massimo! (Si sale e poi si scende)

Capitolo V

“*Problemi di ottimizzazione vincolata*”

V.1 Preliminari

- In questo capitolo, vogliamo tornare allo studio dei problemi

$$\min\left\{f(\mathbf{x})\,:\,g(\mathbf{x})\leq 0\right\}\qquad \text{e}\qquad \max\left\{f(\mathbf{x})\,:\,g(\mathbf{x})\leq 0\right\}$$

  con f, g **continue**

- abbiamo già osservato (vedi *Lezione 7*) che se il vincolo

$$\left\{\mathbf{x}\,:\,g(\mathbf{x})\leq 0\right\}$$

  è limitato, allora per il *Teorema di Weierstrass*, i problemi hanno soluzione

- **come determinarli?** In questo capitolo, vediamo un possibile metodo che funziona quando f, g sono di classe C^1

- discuteremo soprattutto il caso di $N = 2$ variabili, alla fine faremo qualche esempio anche in più variabili (forse!)

Strategia

- Innanzitutto si divide il vincolo

$$\Big\{\mathbf{x}\,:\,g(\mathbf{x})\leq 0\Big\}$$

in due parti...

- ....i *punti interni*

$$A=\Big\{\mathbf{x}\,:\,g(\mathbf{x})<0\Big\}$$

- ...i *punti di frontiera*

$$\partial A=\Big\{\mathbf{x}\,:\,g(\mathbf{x})=0\Big\}$$

- si osservi che A è un **aperto**, quindi su di esso si individuano i candidati punti di max/min usando il *Teorema di Fermat*

- in altre parole, si cercano i punti critici di f in A, ovvero si cercano
$$\mathbf{x} \in A \qquad \text{tali che} \qquad \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- se f è anche di classe C^2, possiamo cercare di classificare questi punti critici, usando i risultati del *Capitolo IV*
- ci mancano i punti di frontiera: infatti, i punti di max/min di f che cerchiamo potrebbero stare su
$$\partial A = \Big\{\mathbf{x} \,:\, g(\mathbf{x}) = 0\Big\}$$
che è un **chiuso**
- NON possiamo usare il *Teorema di Fermat* per questi punti
- dovremo utilizzare un risultato nuovo, che si chiama *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange* (lo vedremo tra poco)

- una volta trovati i candidati punti di max/min all'interno con *Fermat*
- ...e trovati i candidati punti di max/min sulla frontiera con *Lagrange*
- valutiamo f su tutti questi punti e decidiamo quali sono di max, quali di min e quali....di niente!

V.2 Insiemi di livello regolari

Ricordate che se $g : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^N$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo definito l'insieme di livello

$$E_g(t) = \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, g(\mathbf{x}) = t \Big\}$$

Abbiamo visto in vari esempi, che per una funzione di $N = 2$ variabili, questo insieme di livello molto spesso era il **sostegno di una curva regolare** (pensate per esempio alle funzioni radialmente simmetriche)

Domanda

È sempre vero questo fatto?

Esercizio

Si consideri la funzione di classe C^∞

$$f(x, y) = x^3 - y^2$$

- *Si disegni la linea di livello $E_f(0)$*
- *si faccia vedere che $E_f(0)$* **non** *può essere il sostegno di una curva regolare*

Soluzione

- Ricordando la definizione, si ha

$$E_f(0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^3 - y^2 = 0\right\}$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 = x^3\right\}$$

- si osservi che
$$y^2 = x^3$$
è verificata per $x \geq 0$ e
$$y = x^{\frac{3}{2}} \qquad \text{oppure} \qquad y = -x^{\frac{3}{2}}$$

- quindi
$$E_f(0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0 \text{ e } y = x^{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0 \text{ e } y = -x^{\frac{3}{2}}\right\}$$

- in altre parole, $E_f(0)$ è l'unione del grafico delle funzioni
$$y = x^{3/2} \qquad \text{e} \qquad y = x^{-3/2}$$

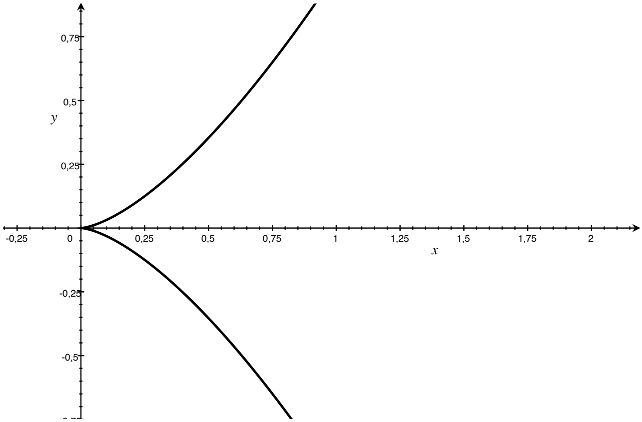

Figura: L'insieme di livello 0 della funzione $f(x, y) = x^3 - y^2$

- si noti che l'insieme di livello ha una cuspide in $(0,0)$
- quindi esso non può coincidere col sostegno di una curva regolare, perché in questo punto non possiamo definire il versore tangente

Ricapitolando

Per un funzione $f(x, y)$, anche derivabile infinite volte, <u>non è sempre vero</u> che gli insiemi di livello

$$E_f(t) = \Big\{(x, y) \, : \, f(x, y) = t\Big\}$$

coincidono col sostegno di una curva regolare

Domanda

Esistono delle condizioni sufficienti che garantiscono quando questo è vero?

Teorema (Dini)

Sia $g : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 sull'aperto $A \subset \mathbb{R}^2$

Supponiamo che

$$E_g(t) = \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, g(\mathbf{x}) = t \Big\}$$

sia **non vuoto** *e* **non contenga punti critici di** g

Allora si ha che:

1. $E_g(t)$ *coincide* **localmente** *con il sostegno di una curva regolare, ovvero:*
   per ogni $\mathbf{x}_0 \in E_g(t)$ esistono $B_R(\mathbf{x}_0)$ ed una curva regolare $\gamma : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ tale che

   $$E_g(t) \cap B_R(\mathbf{x}_0) = \mathrm{Im}(\gamma)$$

2. *tale curva si esprime come una curva cartesiana del tipo*

   $$\gamma(t) = (t, f(t)) \qquad \textit{oppure} \qquad \gamma(t) = (f(t), t)$$

Non facciamo la dimostrazione di questo risultato. Illustriamone il contenuto con un esempio

- prendiamo la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$
- l'insieme di livello $E_g(1)$ è non vuoto (ad esempio $(1, 0)$ appartiene a questo livello)
- inoltre non contiene punti critici di g, perché il suo gradiente

$$\nabla g(x, y) = (2\,x, 2\,y)$$

  si annulla solo in $(0, 0)$, che però non fa parte dell'insieme di livello 1
- il *Teorema di Dini* ci dice che per ogni

$$(x_0, y_0) \in E_g(1)$$

  l'insieme di livello $E_g(1)$ coincide con il grafico di una funzione di una variabile, dentro una pallina $B_R((x_0, y_0))$ sufficientemente piccola

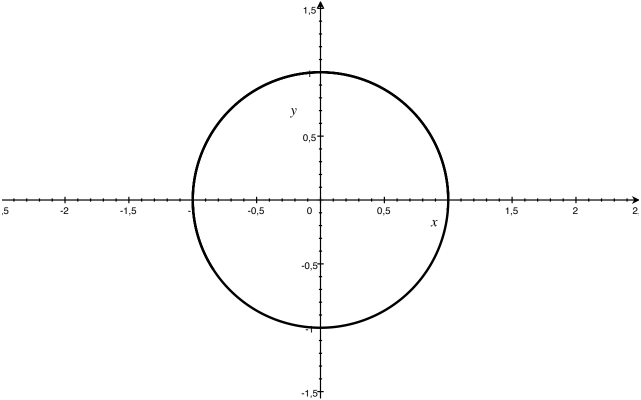

Figura: L'insieme di livello 1 della funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$. Si noti che esso **non coincide** con il grafico di una funzione di una variabile...

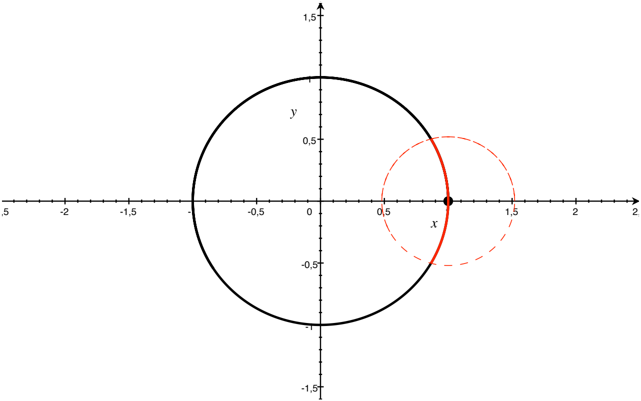

Figura: ...tuttavia questa proprietà è vera **localmente**. Per esempio, nel punto $(1,0)$, dentro la palla tratteggiata in rosso, il pezzo in rosso coincide con il grafico della funzione della variabile y, data da $\varphi(y) = \sqrt{1-y^2}$...(la funzione ce la siamo ricavata dalla relazione $x^2 + y^2 = 1$ soddisfatta dai punti dell'insieme di livello)

Definizione

Sia $g : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 sull'aperto $A \subset \mathbb{R}^2$

Se per un certo $t \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello

$$E_g(t) = \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, g(\mathbf{x}) = t \Big\}$$

è non vuoto e non contiene punti critici di g, si dice che $E_g(t)$ è un **insieme di livello regolare**

Si dirà anche che t è un **valore regolare** di g