Analisi Matematica B
– *Lezione 12* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 8 Aprile 2020

V.3 Moltiplicatori di Lagrange

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $E_g(0) = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$ *un insieme di livello regolare*

Sia f *una funzione definita in un aperto che contiene* $E_g(0)$

Supponiamo che f *sia di classe* C^1

Se $\mathbf{x}_0 \in E_g(0)$ *è soluzione di*

$$\min\Big\{f(\mathbf{x}) \,:\, g(\mathbf{x}) = 0\Big\} \quad \textit{oppure} \quad \max\Big\{f(\mathbf{x}) \,:\, g(\mathbf{x}) = 0\Big\},$$

allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ *(detto* **moltiplicatore di Lagrange***) tale che*

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \, \nabla g(\mathbf{x}_0)}$$

Dimostrazione

- Facciamo la dimostrazione nel caso in cui $\mathbf{x}_0$ sia punto di minimo
- nel caso in cui $\mathbf{x}_0$ sia punto di massimo, la dimostrazione è esattamente la stessa (*farla come esercizio*)
- dall'ipotesi sulla funzione g, possiamo applicare il *Teorema di Dini* e concludere che esiste una palla $B_R(\mathbf{x}_0)$ tale che

$$E_g(0) \cap B_R(\mathbf{x}_0) = \Big\{\mathbf{x} \in A \,:\, g(\mathbf{x}) = 0\Big\} \cap B_R(\mathbf{x}_0),$$

  è il sostegno di una curva regolare $\gamma : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$

- abbiamo quindi che ogni punto di $E_g(0) \cap B_R(\mathbf{x}_0)$ è della forma $\gamma(t)$, per un $t \in (-a, a)$ opportuno

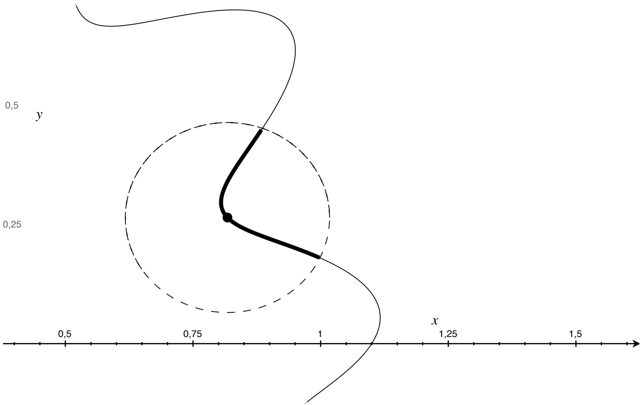


Figura: L'insieme di livello $E_g(0)$ intersecato con una palla $B_R(\mathbf{x}_0)$. In nero, il pezzo di $E_g(0)$ che sta dentro la palla, coincide col sostegno di una curva regolare γ

- in particolare, esiste $t_0 \in (-a, a)$ tale che $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$
- la minimalità di $\mathbf{x}_0$ per f su $E_g(0)$, ovvero il fatto che

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0), \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in E_g(0),$$

- ....si può quindi riscrivere come

$$f(\gamma(t)) \geq f(\gamma(t_0)), \qquad \text{per ogni } t \in (-a, a)$$

- in altre parole, la funzione di una variabile $h(t) = f(\gamma(t))$ ha minimo in $t_0 \in (-a, a)$
- dal *Teorema di Fermat* (in una variabile), deve quindi aversi

$$h'(t_0) = 0$$

- ovvero, deve aversi che la derivata

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

si annulla in $t = t_0$

- ricordando il *Teorema "Derivata curvilinea"*, questa derivata è data da

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

- risulta quindi che

$$\langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

- ricordando che $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$ e che γ è regolare, questo vuol dire che

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{T}_\gamma(t_0) \rangle = 0$$

- in altre parole, in $\mathbf{x}_0$ il gradiente ∇f deve essere **ortogonale** alla direzione tangente al sostegno della curva
- quindi $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ è parallelo al versore normale $\mathbf{N}\gamma$
- ovvero esiste $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \, \mathbf{N}_\gamma(t_0)$$

- ricordando che il sostegno della curva coincide con l'insieme di livello 0 di g....
- ...e che il gradiente $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ è ortogonale all'insieme di livello che contiene $\mathbf{x}_0$, si ottiene quindi che esiste $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla g(\mathbf{x}_0) = \lambda_2 \, \mathbf{N}_\gamma(t_0)$$

- confrontando le ultime due equazioni, si conclude

Importante

- il teorema precedente ci dice che in un punto $\mathbf{x}_0$ di max/min di f che si trovi sulla frontiera
$$\left\{\mathbf{x}\,:\,g(\mathbf{x})=0\right\}$$
i due gradienti $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ e $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ **sono allineati**
- il coefficiente di proporzionalità è il moltiplicatore λ

Interpretazione "geometrica" del Teorema

Ricorda che il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello, quindi

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}_0)=\lambda\,\nabla g(\mathbf{x}_0)}$$

si può leggere geometricamente dicendo che l'insieme di livello $\{\mathbf{x}\,:\,f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)\}$ **deve essere tangente** al vincolo

$$\left\{\mathbf{x}\,:\,g(\mathbf{x})=0\right\}$$

nel punto di max/min vincolato $\mathbf{x}_0$

Esercizio (n. 59 pag. 467 del libro di testo)

Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di ottimizzazione vincolata

$$\min\left\{x^2+3\,y\ :\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\},\ max\left\{x^2+3\,y\ :\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$$

Soluzione

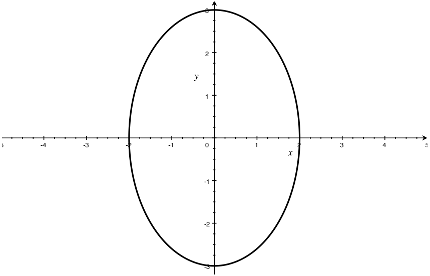
- Se poniamo

$$g(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$$

  l'insieme su cui cerchiamo massimo e minimo, si presenta sotto la forma

$$E_g(0)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ g(x,y)=0\right\}$$

- dal momento che g è continua, si tratta di un chiuso
- non è difficile vedere che si tratta anche di un limitato
- in effetti, l'insieme in questione è un'*ellisse* con semiassi di lunghezza 2 e 3, rispettivamente



- la funzione $f(x, y) = x^2 + 3\,y$ è continua, allora per il *Teorema di Weierstrass* i problemi in questione ammettono soluzione

- vogliamo usare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange* con

$$f(x,y) = x^2 + 3\,y \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

- verifichiamo che le ipotesi del Teorema sono soddisfatte
- f è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$
- l'insieme di livello $E_g(0)$ è regolare, dal momento che

$$\nabla g(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2}{9}\,y\right),$$

  quindi $(0,0)$ è l'unico punto critico di g. Tuttavia questo punto non appartiene al vincolo

- in base al *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*, i punti di max/min sono da cercarsi tra i punti (x,y) tali che

$$g(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla f(x,y) = \lambda\,\nabla g(x,y),$$

  per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

- in altre parole, dobbiamo introdurre la variabile λ *moltiplicatore di Lagrange* e risolvere il sistema di 3 equazioni e 3 incognite $(x, y; \lambda)$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

- osserviamo che

$$\nabla f(x,y) = (2\,x, 3)$$

- il sistema diventa

$$\begin{cases} 2\,x & = & \lambda \dfrac{x}{2} \\ \\ 3 & = & \lambda \dfrac{2}{9}\,y \\ \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} & = & 1 \end{cases}$$

- Risolviamo adesso questo sistema: si ha

$$\begin{cases} 2\,x &= \lambda\,\dfrac{x}{2} \\[2ex] 3 &= \lambda\,\dfrac{2}{9}\,y \\[2ex] \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} &= 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x\,(4-\lambda) &= 0 \\[2ex] \lambda\,y &= \dfrac{27}{2} \\[2ex] \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} &= 1 \end{cases}$$

- dalla prima equazione otteniamo che deve aversi

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lambda = 4$$

- dividiamo quindi le due possibilità, prendendo i due sistemi corrispondenti

- ovvero

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda\, y = \dfrac{27}{2} \\ \cancel{\dfrac{x^2}{4}} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 4 \\ \lambda\, y = \dfrac{27}{2} \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

- possiamo riscriverli come

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda\, y = \dfrac{27}{2} \\ y^2 = 9 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 4 \\ y = \dfrac{27}{8} \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

- nel primo sistema, possiamo già determinare y dalla terza equazione, senza passare dal moltiplicatore λ

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & \pm 3 \end{cases}$$

- nel secondo sistema, sostituiamo $y = 27/8$ nella terza equazione, per trovare x, ovvero

$$\frac{x^2}{4} + \left(\frac{27}{8}\right)^2 \frac{1}{9} = 1$$

che possiamo riscrivere come

$$x^2 + 4\,\frac{(3 \cdot 9)\,(3 \cdot \cancel{9})}{8 \cdot 8}\,\frac{\cancel{1}}{\cancel{9}} = 4$$

ovvero

$$x^2 + \frac{81}{16} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = \frac{64 - 81}{4} < 0 \quad \textbf{NO SOLUZIONI}$$

- in definitiva, dal sistema dei moltiplicatori di Lagrange troviamo le seguenti coppie di punti

$$P_1 = (0, -3) \qquad \text{e} \qquad P_2 = (0, 3)$$

- al fine di trovare massimo e minimo, non ci resta che calcolare f nei punti trovati, ovvero

$$f(0, -3) = -9 \qquad \text{e} \qquad f(0, 3) = 9$$

- quindi $(0, -3)$ è punto di minimo vincolato e $(0, 3)$ è punto di massimo vincolato

- vale inoltre che

$$\min\left\{x^2 + 3\,y \;:\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} = -9,$$

e

$$\max\left\{x^2 + 3\,y \;:\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} = 9$$

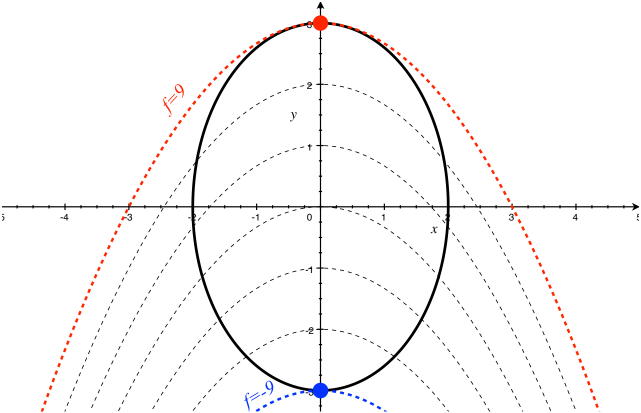


Figura: In grassetto, l'insieme su cui cerchiamo il massimo e minimo di $f(x, y) = x^2 + 3\,y$. Tratteggiate, alcuni insiemi di livello di f: si osservi che coincidono col grafico delle parabole

$$y = \frac{t}{3} - \frac{x^2}{3}$$

al variare di t. Nei punti di massimo (rosso) e minimo (blu), gli insiemi di livello sono tangenti al vincolo, in base al *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*.

Esercizio (n. 61 pag. 467 del libro di testo)

Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di ottimizzazione vincolata

$$\max\left\{x^2\, y + \frac{y^5}{5} \;:\; x^2 + y^4 \leq 1\right\},$$

e

$$\min\left\{x^2\, y + \frac{y^5}{5} \;:\; x^2 + y^4 \leq 1\right\}.$$

Soluzione

- Occupiamoci intanto di mostrare che i problemi ammettono soluzione
- osserviamo che la funzione $g(x, y) = x^2 + y^4 - 1$ è continua su $\mathbb{R}^2$
- quindi il vincolo
$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^4 \leq 1\right\}$$
  è **chiuso**
- dimostriamo che il vincolo è anche limitato
- infatti se $(x, y) \in E$, per definizione vale
$$x^2 \leq x^2 + y^4 \leq 1 \qquad \text{e} \qquad y^4 \leq x^2 + y^4 \leq 1$$
- quindi se $(x, y) \in E$, allora vale
$$|x| \leq 1 \qquad \text{e} \qquad |y| \leq 1$$

- quindi E è limitato, in quanto contenuto nel quadrato di centro $(0,0)$ e lato 2

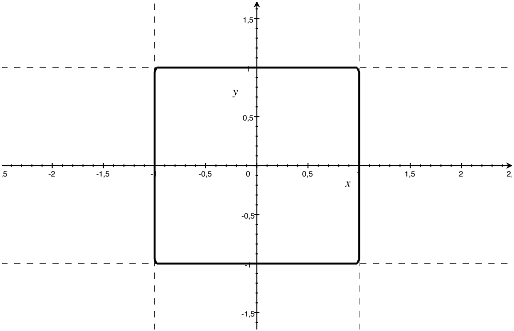


Figura: L'insieme E è contenuto nel quadrato evidenziato, formato da tutti i punti (x, y) tali che $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$

- osserviamo adesso che anche

$$f(x, y) = x^2 y + \frac{y^5}{5}$$

è continua su $\mathbb{R}^2$

- per il *Teorema di Weierstrass* abbiamo che i problemi di ottimizzazione assegnati

$$\max \left\{ x^2 y + \frac{y^5}{5} \, : \, x^2 + y^4 \leq 1 \right\}$$

$$\min \left\{ x^2 y + \frac{y^5}{5} \, : \, x^2 + y^4 \leq 1 \right\}$$

hanno soluzione!

- procediamo a determinare le soluzioni
- discutiamo separatamente i punti interni al vincolo e i punti di frontiera del vincolo
- ovvero, dobbiamo considerare i due sotto-problemi:

  1. trovare i punti di minimo e/o massimo nell'aperto
  $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^4 < 1\}$$
  2. trovare i punti di minimo e/o massimo in
  $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^4 = 1\}$$

- una volta trovati tutti i punti candidati, si procede a calcolare f in questi punti, al fine di decidere quanto valgono il massimo ed il minimo su tutto l'insieme E

Procediamo quindi per punti:

1. punti di massimo/minimo <u>interni al vincolo</u>:

   - la funzione f è derivabile
   - dal *Teorema di Fermat*, i punti di massimo/minimo interni vanno cercati tra i punti critici
   - troviamo i punti critici di f, che stanno nell'insieme

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^4 < 1\right\}$$

   - ricordando che

$$f(x, y) = x^2\, y + \frac{y^5}{5}$$

   - si ha

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} 2\, x\, y & = & 0 \\ x^2 + y^4 & = & 0 \end{array} \right.$$

- la seconda equazione ci da subito
$$(x, y) = (0, 0)$$
come unica soluzione
- $(0, 0)$ è l'unico punto critico di f
- si noti che
$$(0, 0) \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^4 < 1\right\}$$
- proviamo a classificare questo punto critico: osserviamo che f è C^2 su $\mathbb{R}^2$
- la sua matrice hessiana è data da
$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 2\,y & 2\,x \\ 2\,x & 4\,y^3 \end{bmatrix}$$
da cui si ottiene
$$HF(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ci è andata male: $(0,0)$ è un punto critico **degenere**
- inoltre, si ha anche
$$\mathrm{tr} Hf(0,0) = 0$$
quindi non possiamo nemmeno usare la *Proposizione M.D.N* (vedi *Lezione 10*)
- proviamo con un metodo "artigianale": la restrizione di f alla curva $\{x = 0\}$ è data da
$$h(y) = f(0,y) = \frac{y^5}{5}$$
- tale funzione è **monotona crescente**
- $(0,0)$ non può essere ne' di massimo ne' di minimo;

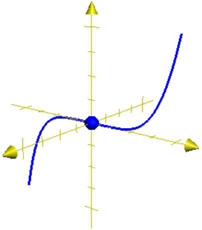


Figura: Il grafico della restrizione di f all'asse delle y. L'origine non può essere ne' punto di massimo ne' punto di minimo.

2. punti di massimo/minimo <u>sulla frontiera del vincolo</u>
   - vogliamo usare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*
   - si osservi che la frontiera del vincolo è della forma

$$E_g(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, g(x,y) = 0\}, \qquad \text{con } g(x,y) = x^2 + y^4 - 1$$

   - si tratta di un **insieme di livello regolare**, dal momento che

$$\nabla g(x,y) = (2\,x, 4\,y^3) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

     ma quest'ultimo punto non appartiene a $E_g(0)$
   - introduciamo quindi la variabile λ *moltiplicatore di Lagrange*
   - i punti che ci interessano sono da ricercare tra le soluzioni del sistema (3 equazioni, 3 incognite)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(x,y) & = & \lambda\,\nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{array} \right.$$

- che diventa in questo caso

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\,x\,y & = & 2\,\lambda\,x \\ x^2+y^4 & = & 4\,\lambda\,y^3 \\ x^2+y^4 & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x\,(y-\lambda) & = & 0 \\ x^2+y^4 & = & 4\,\lambda\,y^3 \\ x^2+y^4 & = & 1 \end{array}\right.$$

- dalla prima equazione, abbiamo due possibilità

$$x=0 \qquad \text{oppure} \qquad y=\lambda$$

- di conseguenza, il sistema precedente si divide nei due seguenti (di cui poi dovremo prendere le unioni delle soluzioni)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ x^2+y^4 & = & 4\,\lambda\,y^3 \\ x^2+y^4 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \cup \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \lambda \\ x^2+y^4 & = & 4\,\lambda^4 \\ x^2+y^4 & = & 1 \end{array}\right.$$

- per quanto riguarda il primo sistema

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & \pm 1 \\ 4\,\lambda & = & \pm 1 \end{cases}$$

- dalla terza equazione otteniamo direttamente

$$y^4 = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad y = \pm 1$$

- dal primo sistema, otteniamo quindi la coppia di punti candidati

$$P_1 = (0, 1), \qquad P_2 = (0, -1)$$

  e possiamo evitare di determinare il corrispondente moltiplicatore λ

- per quanto riguarda il secondo sistema

$$\begin{cases} y & = & \lambda \\ x^2 + y^4 & = & 4\,\lambda^4 \\ x^2 + y^4 & = & 1 \end{cases}$$

- sostituendo $y = \lambda$ nella seconda e terza equazione, si ottiene

$$x^2 = 3\,\lambda^4 \qquad \text{e} \qquad x^2 = 1 - \lambda^4$$

- eguagliando queste due, si trovano i possibili moltiplicatori, che devono soddisfare

$$4\,\lambda^4 = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- ricordando poi che deve valere

$$y = \lambda \qquad \text{e} \qquad x^2 = 3\,\lambda^4$$

- ...otteniamo anche i punti

$$P_{3,4} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{e} \qquad P_{5,6} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- i punti candidati massimi o minimi sono 6

$$(0, \pm 1), \quad \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- calcoliamo f in questi punti

$$f(0,1) = \frac{1}{5}, \qquad f(0,-1) = -\frac{1}{5}, \qquad f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{5\sqrt{2}}$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{5\sqrt{2}}$$

- abbiamo quindi ottenuto

$$\max\left\{x^2\,y+\frac{y^5}{5}\ :\ x^2+y^4\le 1\right\}=\frac{4}{5\,\sqrt{2}}$$

con

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{punti di massimo}$$

- ed anche

$$\min\left\{x^2\,y+\frac{y^5}{5}\ :\ x^2+y^4\le 1\right\}=-\frac{4}{5\,\sqrt{2}}$$

con

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{punti di minimo}$$

- questo conclude l'esercizio

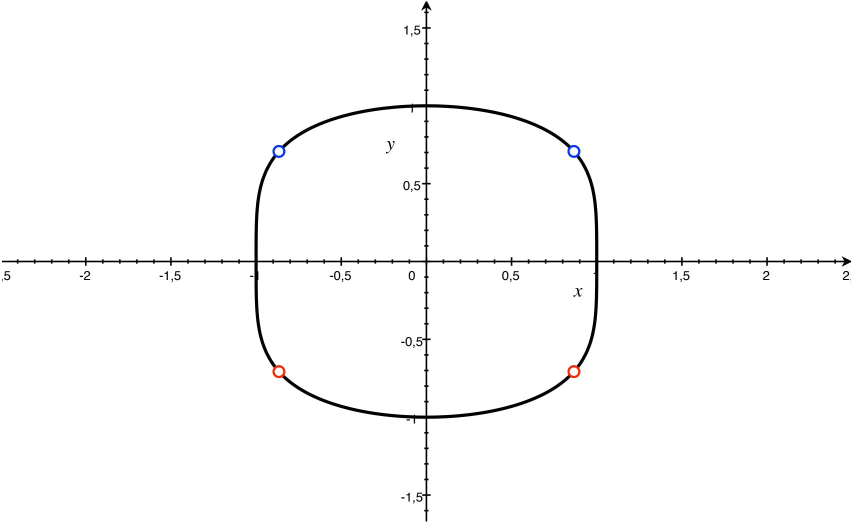


Figura: Il bordo del vincolo dell'esercizio precedente. In blu i punti di massimo, in rosso i punti di minimo.

V.4 Il caso di più variabili

Nel caso di funzioni di 3 o più variabili, il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange* continua a valere con esattamente lo stesso enunciato!

L'unica differenza è che per $N \geq 3$ un insieme di livello regolare

$$E_g(0) = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$$

non sarà il sostegno di una curva regolare, ma sarà qualcosa di $N - 1$ dimensionale....

Nel caso di $N = 3$ variabili in particolare, sarà una **superficie regolare** (vedi prossimo capitolo)

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $E_g(0) = \{\mathbf{x} \,:\, g(\mathbf{x}) = 0\}$ *un insieme di livello regolare*

Sia f *una funzione definita in un aperto che contiene* $E_g(0)$

Supponiamo che f *sia di classe* C^1

Se $\mathbf{x}_0 \in E_g(0)$ *è soluzione di*

$$\min\left\{f(\mathbf{x}) \,:\, g(\mathbf{x}) = 0\right\} \quad \textit{oppure} \quad \max\left\{f(\mathbf{x}) \,:\, g(\mathbf{x}) = 0\right\},$$

allora esiste un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ *(detto* **moltiplicatore di Lagrange***)* *tale che*

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)}$$

Proviamo a metterlo in pratica subito

Esercizio (Compito del 17/02/2020)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x, y, z) = x^3 - y + z$$

e sia

$$E = \Big\{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

Si trovino il massimo ed il minimo di f *su* E

Soluzione

- Mostriamo che i problemi ammettono soluzione
- osserviamo che la funzione $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ è continua su $\mathbb{R}^3$
- quindi il vincolo
$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$
  è **chiuso**
- si vede facilmente che il vincolo è anche limitato (si tratta di una palla chiusa)

- osserviamo adesso che anche

$$f(x, y) = x^3 - y + z$$

  è continua su $\mathbb{R}^3$

- per il *Teorema di Weierstrass* abbiamo che i problemi di ottimizzazione assegnati

$$\max \left\{ x^3 - y + z \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

$$\min \left\{ x^3 - y + z \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

  hanno soluzione!

- procediamo a determinare le soluzioni
- come sempre, discutiamo separatamente i punti interni al vincolo e i punti di frontiera del vincolo
- ovvero, dobbiamo considerare i due sotto-problemi:

  1. trovare i punti di minimo e/o massimo in
  $$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2<1\Big\}$$
  2. trovare i punti di minimo e/o massimo in
  $$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2=1\Big\}$$

- una volta trovati tutti i punti candidati, si procede a calcolare f in questi punti, al fine di decidere quanto valgono il massimo ed il minimo su tutto l'insieme E

Procediamo quindi per punti:

1. punti di massimo/minimo interni al vincolo:

   - la funzione f è derivabile
   - dal *Teorema di Fermat*, i punti di massimo/minimo interni vanno cercati tra i punti critici
   - troviamo i punti critici di f, che stanno nell'insieme

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 < 1\Big\}.$$

   - ricordando che

$$f(x, y, z) = x^3 - y + z$$

   - si ha

$$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x^2 & = & 0 \\ -1 & = & 0 \\ 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

- questo sistema non ha soluzioni
- f **non ha** punti critici!
- di conseguenza, non ci sono punti di max/min <u>all'interno</u>!

2. punti di massimo/minimo <u>sulla frontiera del vincolo</u>

- vogliamo usare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange*
- si osservi che la frontiera del vincolo è della forma

$$E_g(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, g(x, y, z) = 0\}$$

con

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

- si tratta di un **insieme di livello regolare**, dal momento che

$$\nabla g(x, y, z) = (2\,x, 2\,y, 2\,z) = (0, 0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

ma quest'ultimo punto non appartiene a $E_g(0)$

- introduciamo quindi la variabile λ *moltiplicatore di Lagrange*...

- ...e troviamo la soluzione del sistema (4 equazioni e 4 incognite)

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = & 0 \end{cases}$$

- ovvero

$$\begin{cases} 3\,x^2 & = & 2\,\lambda\,x \\ -1 & = & 2\,\lambda\,y \\ 1 & = & 2\,\lambda\,z \\ x^2+y^2+z^2 & = & 1 \end{cases}$$

- partiamo dalla prima equazione, per cui abbiamo due possibilità

$$\boxed{x=0} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{x \neq 0 \;\; \text{e } 3\,x = 2\,\lambda}$$

- nel primo caso $x = 0$, abbiamo dunque

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ -1 & = & 2\,\lambda\,y \\ 1 & = & 2\,\lambda\,z \\ y^2 + z^2 & = & 1. \end{cases}$$

- la seconda e la terza equazione ci dicono che deve aversi $y = -z$
- sostituendo nella quarta equazione, abbiamo allora

$$2\,y^2 = y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- abbiamo quindi trovato i punti

$$P_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- non abbiamo ancora finito! Dobbiamo tornare all'inizio e considerare il caso in cui

$$\boxed{x \neq 0 \quad \text{e} \quad 3\,x = 2\,\lambda}$$

- ovvero

$$\begin{cases} 3\,x & = & 2\,\lambda \\ -1 & = & 2\,\lambda\,y \\ 1 & = & 2\,\lambda\,z \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1. \end{cases}$$

- le prime tre equazioni ci permettono di esprimere x, y, e z in funzione del moltiplicatore λ e trovare

$$y = -z \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{3\,x}$$

- sostituendo nella quarta equazione, si ha

$$x^2 + \frac{1}{9\,x^2} + \frac{1}{9\,x^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 9\,x^4 - 9\,x^2 + 2 = 0$$

- ponendo $t = x^2$, si ottiene

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} = \frac{3 \pm 1}{6}.$$

- da cui quindi

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

- ricordando che deve aversi

$$y = -z \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{3\,x}$$

  abbiamo quindi trovato gli ulteriori 4 candidati

$$P_3 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \qquad P_4 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- valutiamo adesso f in corrispondenza di questi 6 punti, per determinare il massimo ed il minimo
- si ha

$$f(P_1) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \qquad f(P_2) = -f(P_1) = \sqrt{2}$$

$$f(P_3) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \qquad f(P_4) = -f(P_3) = -\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$f(P_5) = \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{3}} \qquad f(P_6) = -f(P_5) = -\frac{7}{3\sqrt{3}}$$

- osservando che

$$\sqrt{2} > \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} > \frac{7}{3\sqrt{3}},$$

abbiamo che P_2 è punto di massimo, P_1 è punti di minimo e

$$\max_E f = \sqrt{2} \qquad \min_E f = -\sqrt{2}.$$