Analisi Matematica B
– *Lezione 15* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 28 Aprile 2020

Capitolo VII

“*Calcolo integrale in più variabili*”

VII.1 Integrali di linea

Problema

- Supponiamo di avere una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ regolare
- supponiamo di avere anche una funzione f di N variabili, definita su un aperto che contiene $\mathrm{Im}(\gamma)$
- vorremmo definire l'*integrale di f lungo il sostegno di γ*
- indicheremo questo nuovo oggetto matematico col simbolo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})$$

Per costruire questo integrale, ci rifacciamo alla costruzione di integrale di Riemann per funzioni di una variabile, vista ad ANALISI MATEMATICA A

Per illustrare la costruzione, partiamo con un esempio "visuale"

- prendiamo $N = 2$, ovvero γ è una curva piana e f è funzione di due variabili
- supponiamo per il momento che f sia positiva
- allora, come già per le funzioni di una variabile, l'integrale

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})$$

dovrebbe rappresentare l'area del "sottografico"

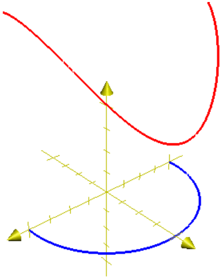


Figura: In blu, il sostegno della curva γ. In rosso, il grafico di f ristretta a questa curva.

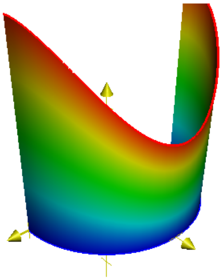


Figura: Vogliamo che l'integrale di linea che dobbiamo definire rappresenti l'area del sottografico....si noti che questo sottografico è un sottoinsieme bidimensionale "curvo" (una specie di lenzuolo, diciamo)

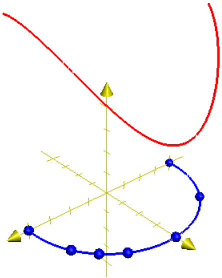


Figura: Proviamo a seguire la stessa idea che abbiamo usato per l'integrale di funzioni di una variabile: selezioniamo dei punti $\gamma(a), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n), \gamma(b)$ sul sostegno della curva...

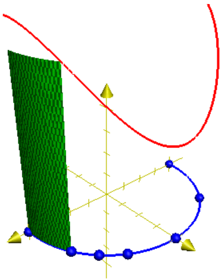


Figura: ...e cominciamo ad approssimare l'area del sottografico "curvo" **per difetto**, tramite il rettangolo "curvo" in figura. L'area di tale rettangolo è data da $\mathrm{base} \times \mathrm{altezza}$

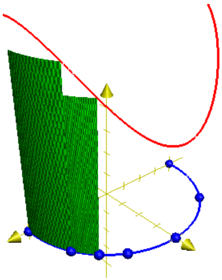


Figura: ...procedo con la stessa idea anche nel secondo pezzo del sostegno, quello che connette $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$...

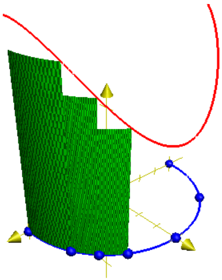


Figura: ...procedo con la stessa idea anche nel terzo pezzo del sostegno, quello che connette $\gamma(t_2)$ e $\gamma(t_3)$...

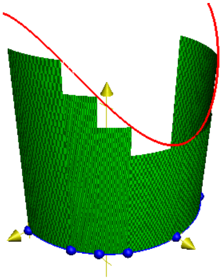


Figura: ...e così via, fino ad arrivare in fondo

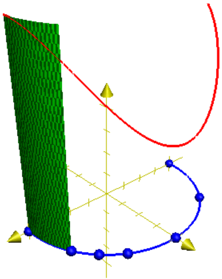


Figura: Adesso uso la stessa idea, per costruirmi anche un'approssimazione dell'area **per eccesso**: nel primo pezzo del sostegno della curva...

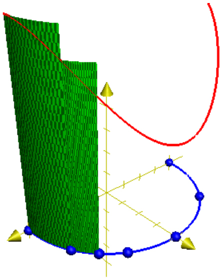


Figura: ...faccio lo stesso nel secondo pezzo....

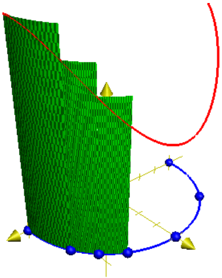


Figura: ...nel terzo pezzo....

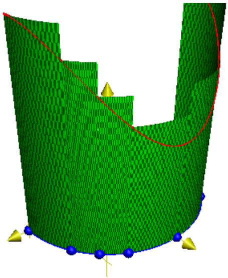


Figura: ...e così via, fino ad arrivare in fondo

Dopo di che, definirò l'integrale di linea

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})$$

come l'*estremo superiore tra tutte le approssimazioni per difetto*, nel caso in cui questo coincida con l'*estremo inferiore delle approssimazioni per eccesso*

Ricorda

Questa è esattamente l'idea che abbiamo seguito per costruire l'integrale di Riemann per funzioni di una variabile (vedi ANALISI MATEMATICA A)

Queste erano le chiacchiere ed i disegni...vogliamo provare a buttare giù l'idea in modo più rigoroso con delle formule?

- supponiamo innanzitutto che γ sia parametrizzata tramite *ascissa curvilinea*
- ovvero $\gamma : [0, \ell(\gamma)] \to \mathbb{R}^2$ tale che

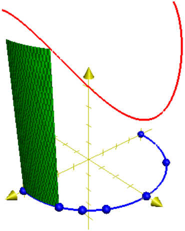
$$|\gamma'(s)| = 1 \qquad \text{per ogni } s \in [0, \ell(\gamma)]$$

- ricorda che è sempre possibile fare questa ipotesi, grazie al *Teorema "ascissa curvilinea"* (vedi *Lezione 4*)
- come nei disegni precedenti, selezioniamo quindi un numero finito di punti distinti del sostegno

$$\gamma(0),\ \gamma(s_1),\ \gamma(s_2), \dots,\ \gamma(s_n),\ \gamma(\ell(\gamma))$$

  prendendo una partizione $\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}\}$ dell'intervallo $[0, \ell(\gamma)]$

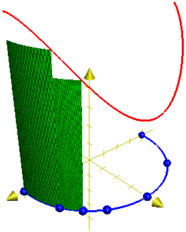
Scriviamo quanto vale l'area del rettangolo curvo evidenziato



$$\text{base} \times \text{altezza} = \left(\int_0^{s_1} |\gamma'(s)|\, ds \right) \times \inf_{s \in [0, s_1]} f(\gamma(s))$$
$$= s_1 \inf_{s \in [0, s_1]} f(\gamma(s))$$

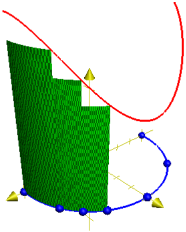
abbiamo usato il *Teorema di rettificabilità* e la particolare parametrizzazione di γ, per calcolare la lunghezza della base

In modo analogo, l'area del secondo rettangolo "curvo" è data da



$$\text{base} \times \text{altezza} = \left(\int_{s_1}^{s_2} |\gamma'(s)|\, ds \right) \times \inf_{s \in [s_1, s_2]} f(\gamma(s))$$
$$= (s_2 - s_1) \inf_{s \in [s_1, s_2]} f(\gamma(s))$$

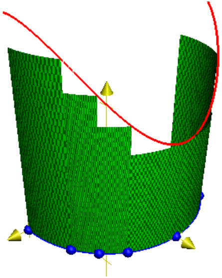
In modo analogo, l'area del terzo rettangolo "curvo" è data da



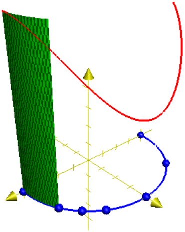
$$\text{base} \times \text{altezza} = \left(\int_{s_2}^{s_3} |\gamma'(s)|\, ds\right) \times \inf_{s\in[s_2,s_3]} f(\gamma(s))$$
$$= (s_3 - s_2) \inf_{s\in[s_2,s_3]} f(\gamma(s))$$

In definitiva, l'area approssimata per difetto, corrispondente alla partizione scelta, è data da

$$\sum_{i=0}^{n}(s_{i+1} - s_i) \inf_{s\in[s_{i+1},s_i]} f(\gamma(s))$$



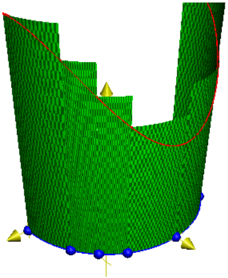
Passiamo adesso all'approssimazione per eccesso. L'area del rettangolo curvo evidenziato vale



$$\text{base} \times \text{altezza} = \left(\int_0^{s_1} |\gamma'(s)| \, ds \right) \times \sup_{s \in [0, s_1]} f(\gamma(s))$$
$$= s_1 \sup_{s \in [0, s_1]} f(\gamma(s))$$

Ripetendo il ragionamento su ogni pezzo di curva, l'area approssimata per eccesso, corrispondente alla partizione scelta, è data da

$$\sum_{i=0}^{n} (s_{i+1} - s_i) \sup_{s \in [s_{i+1}, s_i]} f(\gamma(s))$$



Usando le notazioni di ANALISI MATEMATICA A, abbiamo trovato che

Approssimazione per difetto

$$\sum_{i=0}^{n}(s_{i+1}-s_i)\inf_{s\in[s_{i+1},s_i]} f(\gamma(s)) = S_-(f\circ\gamma;\{s_0,\ldots,s_{n+1}\})$$

somma di Riemann inferiore di $f\circ\gamma$ *subordinata alla partizione* $\{s_0,\ldots,s_{n+1}\}$

Approssimazione per eccesso

$$\sum_{i=0}^{n}(s_{i+1}-s_i)\sup_{s\in[s_{i+1},s_i]} f(\gamma(s)) = S_+(f\circ\gamma;\{s_0,\ldots,s_{n+1}\})$$

somma di Riemann superiore di $f\circ\gamma$ *subordinata alla partizione* $\{s_0,\ldots,s_{n+1}\}$

Definizione

Diciamo quindi che

f è integrabile secondo Riemann sul sostegno $\mathrm{Im}(\gamma)$

se

$$\sup\Big\{S_-(f\circ\gamma;\{s_0,\dots,s_{n+1}\})\ :\ \{s_0,\dots,s_{n+1}\}\ \text{partizione}\Big\}$$
$$=\inf\Big\{S_+(f\circ\gamma;\{s_0,\dots,s_{n+1}\})\ :\ \{s_0,\dots,s_{n+1}\}\ \text{partizione}\Big\}$$

Quando questo avviene, definiamo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\,d\ell(\mathbf{x})$$

come questo valore comune

Osservazione importante

Per costruzione, abbiamo quindi ricondotto l'integrale curvilineo di f sul sostegno di γ (parametrizzata tramite ascissa curvilinea), all'**integrale di Riemann della funzione di una variabile**

$$s \mapsto f(\gamma(s))$$

Si vede allora che se f è integrabile su $\mathrm{Im}(\gamma)$ si ha

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x}) = \int_0^{\ell(\gamma)} f(\gamma(s))\, ds$$

Obiezione

Tutto questo vale se γ è parametrizzata tramite ascissa curvilinea....e se non lo è?

Caso generale

- Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ curva regolare
- dal *Teorema "ascissa curvilinea"* esiste $\phi : [0, \ell(\gamma)] \to [a, b]$ tale che la riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s))$ soddisfa

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = 1$$

- dal momento che (vedi *Lezione 3*)

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\widetilde{\gamma})$$

definiamo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \int_{\mathrm{Im}(\widetilde{\gamma})} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x}) = \int_0^{\ell(\gamma)} f(\widetilde{\gamma}(s))\, ds$$

- l'ultimo integrale possiamo riscriverlo, sbarazzandoci della riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}$...

- nell'ultimo integrale, ricordando che

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s))$$

  operiamo il cambio di variabile

$$\phi(s) = t \qquad \text{ovvero} \qquad s = \phi^{-1}(t)$$

- otteniamo allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x}) &= \int_0^{\ell(\gamma)} f(\widetilde{\gamma}(s))\, ds \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\, \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(t))}\, dt \end{aligned}$$

- la presenza del fattore $\dfrac{1}{\phi'(\phi^{-1}(t))}$ sembra fastidiosa....
- in realtà, avevamo visto nella dimostrazione del *Teorema "ascissa curvilinea"* (vedi *Lezione 4*) che valeva

$$\boxed{\frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(t))} = |\gamma'(t)|}$$

- otteniamo allora che

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x}) &= \int_0^{\ell(\gamma)} f(\widetilde{\gamma}(s))\, ds \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\, \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(t))}\, dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt\end{aligned}$$

Riassumiamo la conclusione di tutta questa discussione nel

Teorema (integrale curvilineo)

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *curva regolare a tratti*

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subset \mathbb{R}^N$ *aperto tale che* $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A$

Se f *è integrabile secondo Riemann sul sostegno* $\mathrm{Im}(\gamma)$*, allora si ha*

$$\boxed{\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x}) = \int_a^b f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt}$$

Commento

Il simbolo $d\ell(\mathbf{x})$ indica l'elemento infinitesimo di lunghezza.
In base alla formula precedente, si ha la corrispondenza formale

$$d\ell(\mathbf{x}) = \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\textit{velocita}}\ \underbrace{dt}_{\textit{tempo}}$$

D'accordo ma....sotto quali condizioni possiamo assicurare che f sia integrabile su $\mathrm{Im}(\gamma)$?

Dalla definizione di

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(\mathbf{x})\, d\ell(\mathbf{x})$$

che abbiamo dato e ricordando i "*Criteri di integrabilità per funzioni di una variabile*" (vedi ANALISI MATEMATICA A), abbiamo il

Teorema (Criterio di integrabilità curvilinea)

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *curva regolare a tratti*

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subset \mathbb{R}^N$ *aperto tale che* $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A$

Se f è continua su A, allora è integrabile secondo Riemann sul sostegno $\mathrm{Im}(\gamma)$

Esercizio

Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *la curva cartesiana*

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad \textit{per } t \in [0,1]$$

Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} x \, d\ell(x,y)$$

Soluzione

- Si tratta di integrare la funzione $f(x,y) = x$
- osserviamo che γ è di classe C^1 e regolare, dal momento che è cartesiana (ricorda: "*le curve cartesiane* C^1 *sono in automatico regolari*", visto nella *Lezione 4*)

- la funzione $f(x,y) = x$ è continua su $\mathbb{R}^2$
- per il "*Criterio di integrabilità curvilinea*", abbiamo che

$$f(x,y) = x$$

  è integrabile secondo Riemann sul sostegno di γ
- per il *Teorema "integrale curvilineo"* abbiamo allora che

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(x,y)\, d\ell(x,y) = \int_0^1 f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\, |\gamma'(t)|\, dt$$

- ovvero, osservando che

$$\gamma_1(t) = t, \qquad \gamma_2(t) = t^2$$

  e ricordando che $f(x,y) = x$, si ha

$$f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_1(t) = t$$

- inoltre si ha

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (2\,t)^2} = \sqrt{1 + 4\,t^2}$$

- abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} f(x,y)\,d\ell(x,y) &= \int_0^1 f(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_0^1 t\,\sqrt{1 + 4\,t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 8\,t\,(1 + 4\,t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\,(1 + 4\,t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{12}\left(5\,\sqrt{5} - 1\right)
\end{aligned}$$

Gli integrali curvilinei ci servono soprattutto per introdurre due **quantità fisiche** importanti

baricentro e momento d'inerzia

per il sostegno di una curva

Definizione importante

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva regolare a tratti
Si definisce **baricentro del sostegno di** γ il punto

$$\mathbf{b}^\gamma = (b_1^\gamma, \ldots, b_N^\gamma)$$

la cui $i-$esima coordinata è data da

$$b_i^\gamma = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} x_i \, d\ell(\mathbf{x}), \qquad i = 1, \ldots, N$$

Definizione importante

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva regolare a tratti. Sia $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^N$ una retta

Si definisce **momento d'inerzia del sostegno di γ rispetto alla retta** $\mathfrak{R}$ il valore dell'integrale curvilineo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \Big(\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathfrak{R})\Big)^2 \, d\ell(\mathbf{x})$$

dove $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathfrak{R})$ indica la distanza di un punto $\mathbf{x}$ dalla retta assegnata $\mathfrak{R}$

Mettiamo subito in opera queste definizioni con il seguente....

Esercizio

Si consideri la semicirconferenza

$$\Sigma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1,\ y\geq 0\right\}$$

Si determinino

1. *il baricentro di* Σ
2. *i momenti d'inerzia di* Σ *rispetto all'asse delle* y *ed a quello delle* x

Soluzione

- Osserviamo innanzitutto che l'insieme Σ coincide con il sostegno della curva regolare

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad \text{con } t \in [0,\pi]$$

- procediamo adesso per punti

1. determiniamo il baricentro di Σ

- in base alla definizione, si tratta del punto

$$\mathbf{b}^\gamma = (b_1^\gamma, b_2^\gamma)$$

le cui coordinate sono date da

$$b_1^\gamma = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} x \, d\ell(x, y)$$

$$b_2^\gamma = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} y \, d\ell(x, y)$$

- osserviamo che per la simmetria dell'insieme, è ragionevole aspettarsi che si abbia

$$b_1^\gamma = 0,$$

ovvero che il baricentro stia sull'asse delle y

- ....comunque adesso lo calcoliamo e vediamo se è vero!
- al fine di calcolare il baricentro, ci serve innanzitutto la lunghezza
- trattandosi di mezza circonferenza, possiamo subito dire che

$$\ell(\gamma) = \pi$$

- calcoliamo adesso (*ricorda*: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ e $|\gamma'(t)| = 1$)

$$\begin{aligned} b_1^\gamma &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} x \, d\ell(x, y) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \gamma_1(t) \, |\gamma'(t)| \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t \, dt = \frac{1}{\pi} \Big[\sin t \Big]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

- per quanto riguarda la seconda coordinata del baricentro

$$
\begin{aligned}
b_2^\gamma &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} y \, d\ell(x, y) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \gamma_2(t) \, |\gamma'(t)| \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \, dt = \frac{1}{\pi} \Big[-\cos t \Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

- quindi il baricentro di Σ è dato dal punto

$$
\left(0, \frac{2}{\pi} \right)
$$

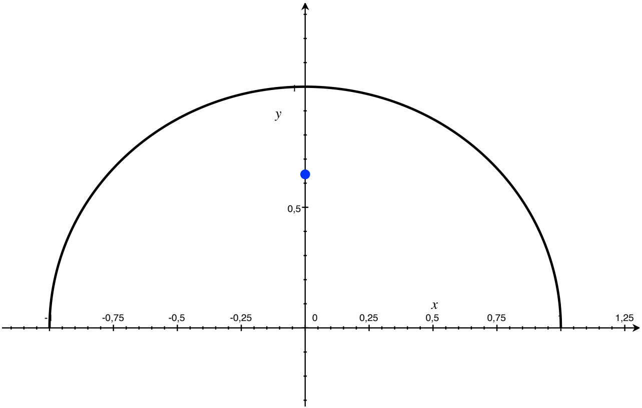


Figura: Il baricentro di Σ

2. <u>determiniamo i momenti d'inerzia</u>

- partiamo da quello rispetto all'asse y
- in base alla definizione, dobbiamo calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \Big(\mathrm{dist}((x, y), \mathfrak{R})\Big)^2 \, d\ell(x, y)$$

dove $\mathfrak{R}$ è l'asse delle y

- non è difficile vedere che

$$\mathrm{dist}((x, y), \mathfrak{R}) = |x|$$

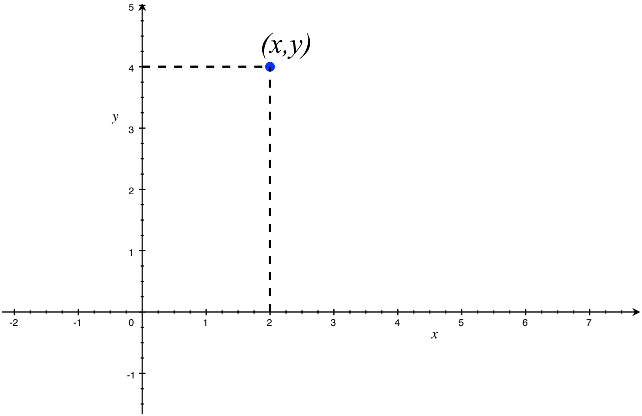


Figura: La distanza dall'asse y di un punto (x, y) è data da $|x|$.

- il momento d'inerzia rispetto all'asse y è quindi dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} x^2 \, d\ell(x,y) &= \int_0^\pi \Big(\gamma_1(t)\Big)^2 \, |\gamma'(t)| \, dt \\
&= \int_0^\pi \cos^2(t) \, dt \\
&= \int_0^\pi \frac{1+\cos(2\,t)}{2} \, dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\,t)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- calcoliamo adesso il momento d'inerzia rispetto all'asse x
- in base alla definizione, dobbiamo calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \Big(\mathrm{dist}((x,y),\mathfrak{R})\Big)^2 \, d\ell(x,y)$$

  dove **stavolta** $\mathfrak{R}$ è l'asse delle x
- non è difficile vedere che

$$\mathrm{dist}((x,y),\mathfrak{R}) = |y|$$

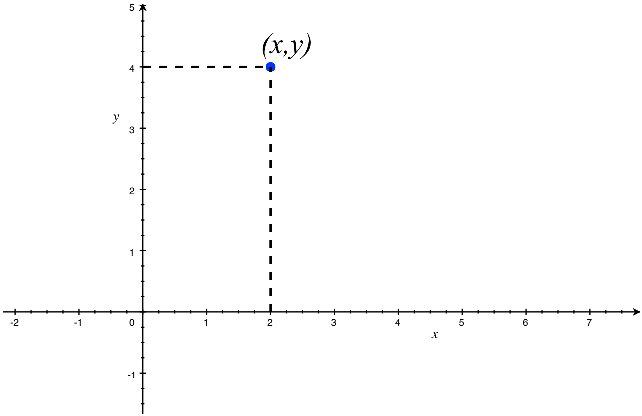


Figura: La distanza dall'asse x di un punto (x, y) è data da $|y|$.

- il momento d'inerzia rispetto all'asse x è quindi dato da

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} y^2 \, d\ell(x,y) &= \int_0^{\pi} \Big(\gamma_2(t)\Big)^2 \, |\gamma'(t)| \, dt \\
&= \int_0^{\pi} \sin^2(t) \, dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2\,t)}{2} \, dt \\
&= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\,t)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio

Si consideri l'elica cilindrica (vedi Lezione 1)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad \textit{per } t \in [0, 10\,\pi]$$

Si determinino

1. *il baricentro di* $\mathrm{Im}(\gamma)$*;*
2. *il momento d'inerzia di* $\mathrm{Im}(\gamma)$ *rispetto all'asse delle z*

Soluzione

Procediamo come prima per punti

1. determiniamo il baricentro di $\mathrm{Im}(\gamma)$

- in base alla definizione, si tratta del punto

$$\mathbf{b}^\gamma = (b_1^\gamma, b_2^\gamma, b_3^\gamma)$$

le cui coordinate sono date da

$$b_1^\gamma = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} x \, d\ell(x, y, z)$$

$$b_2^\gamma = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} y \, d\ell(x, y, z)$$

$$b_3^\gamma = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} z \, d\ell(x, y, z)$$

- per la simmetria dell'insieme, è ragionevole aspettarsi che

$$b_1^\gamma = b_2^\gamma = 0,$$

ovvero che il baricentro stia sull'asse delle z

- ....comunque adesso lo calcoliamo e vediamo se è vero!
- al fine di calcolare il baricentro, ci serve innanzitutto la lunghezza
- osserviamo che la curva è regolare, dal momento che è di classe C^1 e si ha

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \qquad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

da cui

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

- in base al *Teorema di rettificabilità*

$$\ell(\gamma) = \int_0^{10\pi} |\gamma'(t)|\, dt = 10\sqrt{2}\,\pi$$

- calcoliamo adesso le coordinate del baricentro

$$\begin{aligned} b_1^\gamma &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} x \, d\ell(x,y,z) \\ &= \frac{1}{10\sqrt{2}\,\pi} \int_0^{10\,\pi} \gamma_1(t)\, |\gamma'(t)| \, dt \\ &= \frac{1}{10\,\pi} \int_0^{10\,\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{10\,\pi} \Big[\sin t \Big]_0^{10\,\pi} = 0 \end{aligned}$$

- in modo del tutto simile

$$\begin{aligned} b_2^\gamma &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} y \, d\ell(x,y,z) \\ &= \frac{1}{10\,\pi} \int_0^{10\,\pi} \sin t \, dt = \frac{1}{10\,\pi} \Big[-\cos t \Big]_0^{10\,\pi} = 0 \end{aligned}$$

- per quanto riguarda la terza coordinata del baricentro

$$b_3^\gamma = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} z \, d\ell(x,y,z)$$
$$= \frac{1}{10\sqrt{2}\,\pi} \sqrt{2} \int_0^{10\,\pi} t \, dt = \frac{1}{10\,\pi} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{10\,\pi} = 5\,\pi$$

- quindi il baricentro di $\mathrm{Im}(\gamma)$ è dato dal punto

$$(0, 0, 5\,\pi)$$

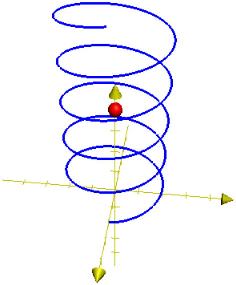


Figura: Il baricentro dell'elica cilindrica

2. <u>determiniamo il momento d'inerzia</u>

- in base alla definizione, dobbiamo calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \Big(\mathrm{dist}((x, y, z), \mathfrak{R})\Big)^2 \, d\ell(x, y, z)$$

  dove $\mathfrak{R}$ è l'asse delle z

- non è difficile vedere che

$$\mathrm{dist}((x, y, z), \mathfrak{R}) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

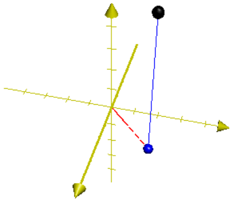


Figura: La distanza dall'asse z di un punto (x, y, z) (in nero) è uguale alla distanza della sua proiezione ortogonale (punto blu) dall'origine, nel piano $x\,y$. Tale distanza (evidenziata in rosso) è quindi $\sqrt{x^2 + y^2}$

- il momento d'inerzia rispetto all'asse z è quindi dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 d\ell(x,y,z) &= \int_0^{10\,\pi} \left(\gamma_1^2(t)+\gamma_2^2(t)\right) |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^{10\,\pi} (\cos^2(t)+\sin^2(t))\, dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^{10\,\pi} dt \\
&= 10\,\pi\,\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Esercizio per casa

Si consideri la spirale archimedea in $\mathbb{R}^3$

$$\gamma(\vartheta) = (\vartheta \ \cos\vartheta, \vartheta \ \sin\vartheta, 0), \qquad \vartheta \in [0, L]$$

Si calcoli il momento d'inerzia del sostegno di γ*, rispetto all'asse z*