Analisi Matematica B
– *Lezione 16* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 29 Aprile 2020

VII.2 Integrali doppi

Abbiamo visto ad Analisi Matematica A che il **problema del calcolo delle aree** ci aveva condotto all'integrale di Riemann per funzioni di una variabile

Vogliamo adesso occuparci del seguente

Il problema del calcolo dei volumi

- Supponiamo di avere una funzione **positiva** $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$ chiuso
- vogliamo calcolare il volume del sottografico di f
- ovvero il volume dell'insieme tridimensionale

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y) \in A,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\Big\}$$

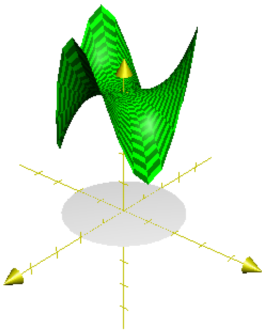


Figura: Il grafico di una funzione positiva di due variabili, definita sul disco. Come calcolare il volume del sottografico?

Anche in questo caso, ci rifacciamo alla costruzione dell'integrale di Riemann per funzioni di una variabile, vista ad Analisi Matematica A

Per illustrare la costruzione, partiamo con un caso semplice

- f è definita su un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$
- approssimeremo il volume del sottografico **per difetto** e **per eccesso**
- con cosa approssimiamo? Per funzioni di una variabile usavamo dei rettangoli, adesso useremo dei parallelepipedi
- **ricorda**: il volume del parallelepipedo è "area di base per altezza"

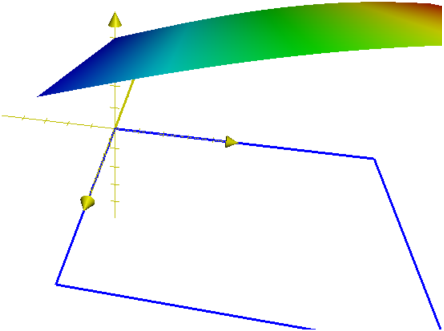


Figura: Il grafico di una funzione positiva definita su un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$

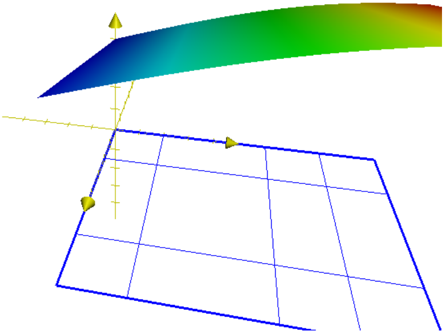


Figura: Cominciamo col dividere il dominio in tanti sotto rettangoli

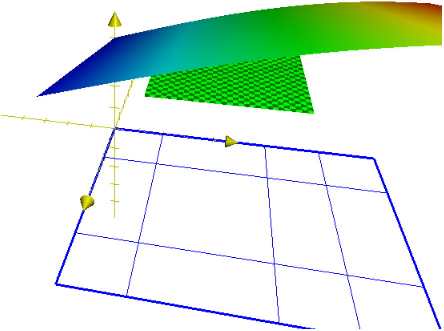


Figura: Su ogni sotto rettangolo, prendendo come “altezza” l’estremo inferiore di f, otteniamo un parallelepipedo che “sta sotto”

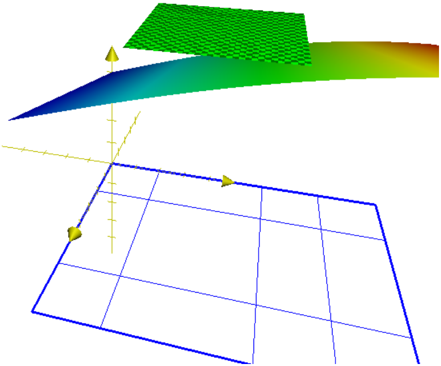


Figura: Su ogni sotto rettangolo, prendendo come “altezza” l’estremo superiore di f, otteniamo un parallelepipedo che “sta sopra”

Sommando tutti i volumi dei parallelepipedi che “stanno sotto”, otteniamo un’approssimazione del volume per difetto

Sommando tutti i volumi dei parallelepipedi che “stanno sopra”, otteniamo un’approssimazione del volume per eccesso

Come sempre, cercheremo poi di prendere le “migliori possibili” di queste approssimazioni

Proviamo a formalizzare questa costruzione con delle formule

Partizione di un rettangolo

Indichiamo con

$$\mathcal{Q} = [a, b] \times [c, d]$$

il nostro dominio

Prendiamo $\{t_0, \ldots, t_n\}$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$

Prendiamo $\{s_0, \ldots, s_k\}$ una partizione dell'intervallo $[c, d]$

I rettangolini

$$\mathcal{Q}_{i,j} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$$

formano una **partizione** del rettangolo iniziale $\mathcal{Q}$

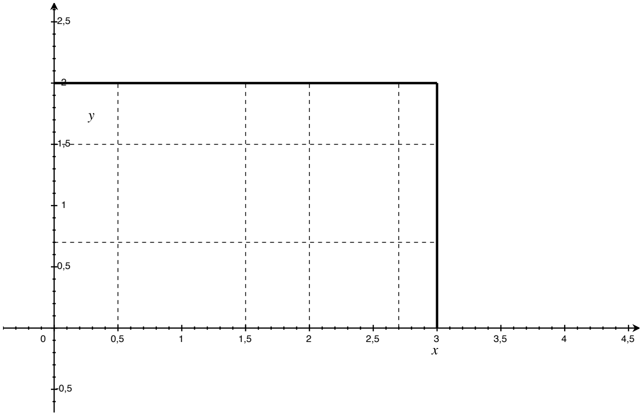


Figura: Una partizione per il rettangolo $[0,3] \times [0,2]$: lo abbiamo suddiviso in $5 \times 3 = 15$ sotto rettangoli

Somme di Riemann inferiori

Scelta quindi una partizione $\{\mathcal{Q}_{i,j}\}$ del rettangolo $\mathcal{Q}$, consideriamo l'approssimazione per difetto data da

$$\sum_{i,j} \text{area di base} \times \text{altezza}$$

ovvero

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{area}(\mathcal{Q}_{i,j}) \cdot \inf_{(x,y)\in\mathcal{Q}_{i,j}} f(x,y)}$$

dove l'area di $\mathcal{Q}_{i,j} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ si trova ovviamente tramite

$$\mathrm{area}(\mathcal{Q}_{i,j}) = (t_{i+1} - t_i)\,(s_{j+1} - s_j)$$

Chiamiamo la formula nel riquadro **somma di Riemann inferiore subordinata alla partizione** $\{\mathcal{Q}_{i,j}\}$ e la indichiamo con

$$\mathcal{S}_-(f; \{\mathcal{Q}_{i,j}\})$$

Somme di Riemann superiori

Scelta quindi una partizione $\{\mathcal{Q}_{i,j}\}$ del rettangolo $\mathcal{Q}$, consideriamo l'approssimazione per eccesso data da

$$\sum_{i,j} \text{area di base} \times \text{altezza}$$

ovvero

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{area}(\mathcal{Q}_{i,j}) \cdot \sup_{(x,y)\in\mathcal{Q}_{i,j}} f(x,y)}$$

Chiamiamo la formula nel riquadro **somma di Riemann superiore subordinata alla partizione** $\{\mathcal{Q}_{i,j}\}$ e la indichiamo con

$$\mathcal{S}_+(f;\{\mathcal{Q}_{i,j}\})$$

Definizione

Sia ancora $\mathcal{Q} = [a,b] \times [c,d]$ e $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$

Definiamo

$$S_- = \sup \Big\{ S_-(f; \{\mathcal{Q}_{i,j}\}) \, : \, \{\mathcal{Q}_{i,j}\} \text{ partizione di } \mathcal{Q} \Big\}$$

$$S_+ = \inf \Big\{ S_+(f; \{\mathcal{Q}_{i,j}\}) \, : \, \{\mathcal{Q}_{i,j}\} \text{ partizione di } \mathcal{Q} \Big\}$$

Si dice che f è **Riemann integrabile su** $\mathcal{Q}$ se vale

$$S_+ = S_-$$

In tal caso, indichiamo questo valore comune con il simbolo

$$\iint_{\mathcal{Q}} f(x,y)\, dx\, dy,$$

e lo chiameremo **integrale doppio di Riemann di** f **su** $\mathcal{Q}$

Teorema [Condizione sufficiente di integrabilità]

Sia $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Allora f è Riemann integrabile su $\mathcal{Q}$

Inoltre il suo integrale doppio si calcola tramite la formula di "integrazione iterata"

$$\iint_{\mathcal{Q}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy$$

oppure

$$\iint_{\mathcal{Q}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx$$

Cerchiamo di capire la formula di “integrazione iterata”

$$\boxed{\iint_{\mathcal{Q}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\, dy}$$

Operativamente, la formula ci dice che per integrare f sul rettangolo $\mathcal{Q}$, si procede come segue

1. fissato $y \in [c,d]$, si considera la funzione di una variabile $x \mapsto f(x,y)$
2. si integra questa funzione sull'intervallo $[a,b]$, con le tecniche viste ad Analisi Matematica A
3. il risultato di questa integrazione dipende da y, ovvero

$$y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$$

   è una funzione di una variabile
4. integrandola adesso su $[c,d]$, si conclude

Cerchiamo di capire il **significato geometrico** di questa formula

La formula ci sta dicendo che per calcolare il volume del sottografico di f, posso considerare questo sottografico come se fosse un "**panettone**":

- taglio tante fette verticali, tenendo il coltello parallelo all'asse x (questo corrisponde a "fissare y")
- calcolo l'area di ognuna di queste fette (questo corrisponde a integrare $\int_a^b f(x, y)\, dx$)
- infine, sommo tutte le aree di queste fette, perché l'unione delle fette mi da il panettone (questo corrisponde a fare l'integrale della funzione $y \mapsto \int_a^b f(x, y)\, dx$)

Scusate l'esempio culinario "fuori stagione"...

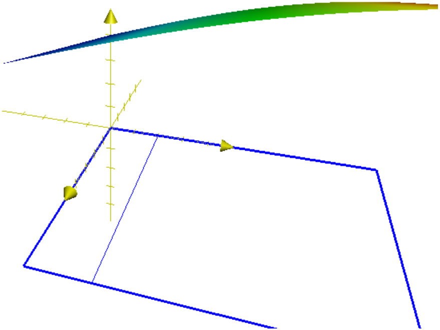


Figura: Fissiamo y e consideriamo la funzione di una variabile $x \mapsto f(x, y)$, definita quindi sul segmento in evidenza

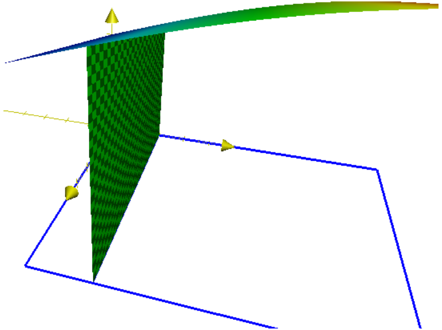


Figura: Da ANALISI MATEMATICA A, sappiamo che l'integrale $\int_a^b f(x,y)\,dx$ rappresenta l'area del sottografico...ovvero l'area della "fetta di panettone" di spessore infinitesimo. Integrando poi rispetto ad y, si sommano tutte queste aree, ricostruendo così il "panettone"

Esercizio

Si calcoli l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2\,y^2}$$

sul quadrato $\mathcal{Q} = [0,1] \times [0,1]$

Soluzione

- Si tratta di una funzione continua su $\mathcal{Q}$, quindi integrabile
- possiamo calcolare l'integrale doppio come integrale iterato

$$\iint_{\mathcal{Q}} \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx \right)\,dy$$

oppure come

$$\iint_{\mathcal{Q}} \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dy \right)\,dx$$

- proviamo nel primo modo: integro prima in x e poi in y
- si ha

$$\iint_{\mathcal{Q}} \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx\right)\,dy$$
$$= \int_0^1 \Big[\arctan(x\,y)\Big]_0^1\,dy$$
$$= \int_0^1 \arctan y\,dy$$

- per calcolare l'ultimo integrale, usiamo un'integrazione per parti

$$\int_0^1 \arctan y\,dy = \Big[y\,\arctan y\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy$$
$$= \arctan(1) - \left[\frac{1}{2}\,\log(1+y^2)\right]_0^1$$

- in definitiva, otteniamo

$$\iint_{\mathcal{Q}} \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx\,dy = \arctan(1) - \left[\frac{1}{2}\,\log(1+y^2)\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\log 2$$

- curiosità: e se invece avessimo proceduto nell'altro modo? ovvero

$$\iint_{\mathcal{Q}} \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dy\right)\,dx$$

- proviamoci!

- si ha

$$\iint_{\mathcal{Q}} \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x^2\,y^2}\,dy\right)\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2\,x^2}\,\log(1+x^2\,y^2)\right]_0^1\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2\,x^2}\,\log(1+x^2)\,dx$$

- questo integrale sembra più difficile!
- in realtà, basta usare di nuovo una integrazione per parti e ricordare che

$$\log(1+x^2) \sim x^2 \text{ per } x \to 0$$

- finite di calcolarlo *per casa*, verificando che si ottiene lo stesso risultato di prima

Torniamo all'esempio che avevamo fatto all'inizio

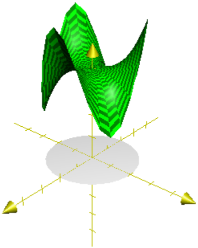


Figura: Questa funzione non è definita su un rettangolo! Come si fa ad estendere la definizione di integrale doppio ad esempi come questi?

In altre parole, vogliamo estendere la definizione di integrale doppio a funzioni

$$f : \overline{A} \to \mathbb{R}$$

dove $\overline{A}$ è la chiusura di un insieme aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ **qualsiasi**, non necessariamente un rettangolo

Basterà prendere un rettangolo $\mathcal{Q}$ abbastanza grande in modo che

$$\overline{A} \subset \mathcal{Q}$$

Si considera una partizione $\{\mathcal{Q}_{i,j}\}$ in sottorettangoli

Si replica la costruzione vista su $\mathcal{Q}$, dividendo il dominio $\overline{A}$ non più in rettangolini, ma tramite la partizione

$$A_{i,j} = \overline{A} \cap \mathcal{Q}_{i,j}$$

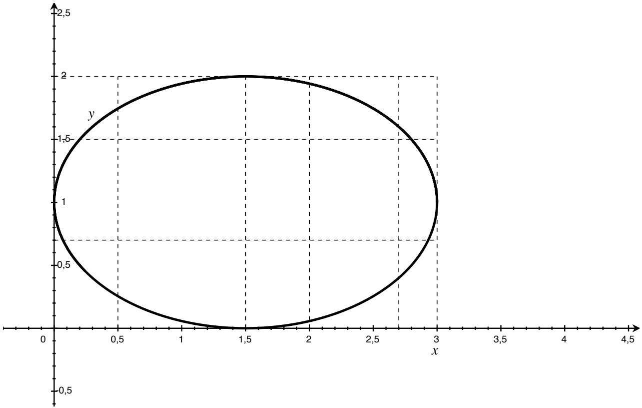


Figura: Per esempio, se $\overline{A}$ è un'ellisse, una sua partizione $\{A_{i,j}\}$ si ottiene come in figura: partizionando il "box" esterno e prendendo le intersezioni di questi rettangolini con l'ellisse

Somme di Riemann inferiori

Scelta una partizione $\{A_{i,j}\}$ del dominio $\overline{A}$, consideriamo l'approssimazione per difetto data da

$$\sum_{i,j} \text{area di base} \times \text{altezza}$$

ovvero

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{area}(A_{i,j}) \cdot \inf_{(x,y) \in A_{i,j}} f(x,y)}$$

si faccia attenzione adesso che $A_{i,j}$ non è un rettangolo in generale

Chiamiamo la formula nel riquadro **somma di Riemann inferiore subordinata alla partizione** $\{A_{i,j}\}$ e la indichiamo con

$$\mathcal{S}_{-}(f; \{A_{i,j}\})$$

Somme di Riemann superiori

Scelta una partizione $\{A_{i,j}\}$ del dominio $\overline{A}$, consideriamo l'approssimazione per eccesso data da

$$\sum_{i,j} \text{area di base} \times \text{altezza}$$

ovvero

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{area}(A_{i,j}) \cdot \sup_{(x,y)\in A_{i,j}} f(x,y)}$$

Chiamiamo la formula nel riquadro **somma di Riemann superiore subordinata alla partizione** $\{A_{i,j}\}$ e la indichiamo con

$$\mathcal{S}_+(f;\{A_{i,j}\})$$

Come nel caso di $\mathcal{Q}$, poniamo la

Definizione

Sia anche $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato

Definiamo

$$S_- = \sup\left\{ S_-(f; \{A_{i,j}\}) \ : \ \{A_{i,j}\} \text{ partizione di } \overline{A} \right\}$$

$$S_+ = \inf\left\{ S_+(f; \{A_{i,j}\}) \ : \ \{A_{i,j}\} \text{ partizione di } \overline{A} \right\}$$

Si dice che f è **Riemann integrabile su $\overline{A}$** se vale

$$S_+ = S_-$$

In tal caso, indichiamo questo valore comune con il simbolo

$$\iint_{\overline{A}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

e lo chiameremo **integrale doppio di Riemann di f su $\overline{A}$**

Nel caso di una funzione f definita su un rettangolo, avevamo visto che la continuità di f era sufficiente per avere l'integrabilità

Nel caso di $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ la situazione è più complicata e l'esistenza di

$$\iint_{\overline{A}} f(x, y)\, dx\, dy$$

non dipende solo da f ma anche da "quanto è bello" l'insieme $\overline{A}$

La classe di insiemi "belli" su cui potremo fare integrali doppi comprende quella degli insiemi **semplici**

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso limitato

Si dice che E è $y-$**semplice** se

esistono due funzioni continue $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che

l'insieme E è della forma

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a, b],\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\Big\}$$

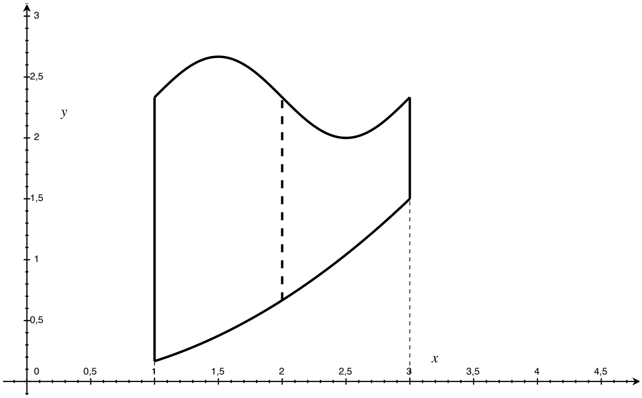


Figura: Un insieme $y-$semplice: per definizione, "affettando" l'insieme con una retta parallela all'asse y, si ottiene **sempre** un segmento, con estremi $g_1(x)$ e $g_2(x)$

Definizione

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso limitato

Si dice che E è $x-$**semplice** se

esistono due funzioni continue $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ tali che

l'insieme E è della forma

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \in [c, d], \, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\Big\}$$

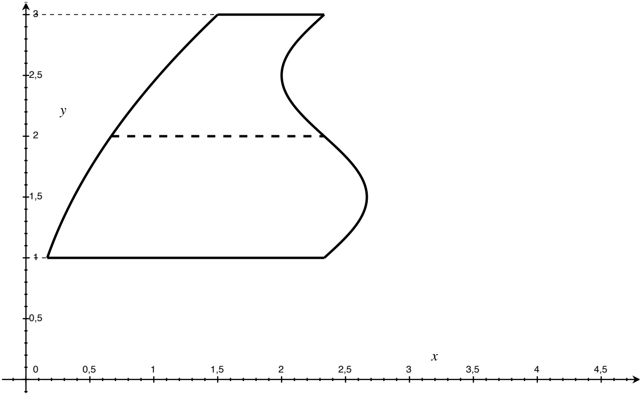


Figura: Un insieme $x-$semplice: per definizione, "affettando" l'insieme con una retta parallela all'asse x, si ottiene **sempre** un segmento, con estremi $h_1(y)$ e $h_2(y)$

Infine, dal momento che gli insiemi che ci interessano non saranno sempre $x-$semplici o $y-$semplici, ci serve la seguente definizione più generale

Definizione

Si dice che un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ è **Riemann-regolare** se coincide con l'unione di un numero finito

$$E_1, E_2, \ldots, E_n$$

di insiemi $x-$semplici o $y-$semplici, che si intersecano a due a due lungo la frontiera

Esercizio

Si dica quali tra i seguenti insiemi sono $x-$semplici, $y-$semplici o Riemann-regolari

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Si rappresenti graficamente ognuno di questi insiemi

Soluzione

- Cominciamo dall'insieme A
- in base alla definizione, si vede subito che A è un insieme $y-$**semplice**

- infatti l'insieme

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x\Big\}$$

  è esattamente della forma

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\, g_1(x) \le y \le g_2(x)\Big\}$$

- abbiamo $a = 0$, $b = 1$ e le funzioni

$$g_1(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad g_2(x) = x$$

- per rappresentare graficamente A, ci basta disegnare i grafici di g_1 e g_2 limitatamente all'intervallo $[0, 1]$
- A sarà dunque la regione di piano compresa fra questi due grafici

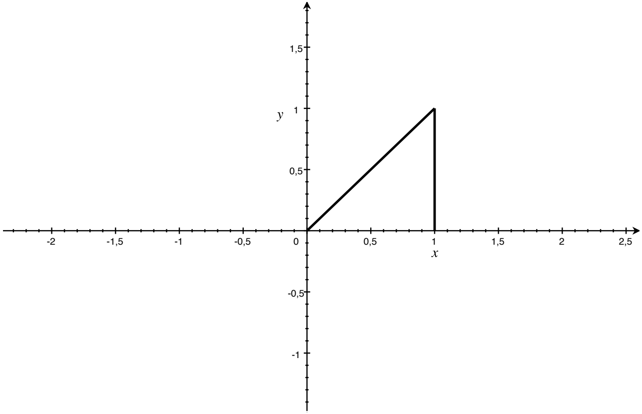


Figura: Il primo insieme A è un triangolo rettangolo, di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,0)$. L'ipotenusa corrisponde al grafico di $g_2(x) = x$, sull'intervallo $[0,1]$.

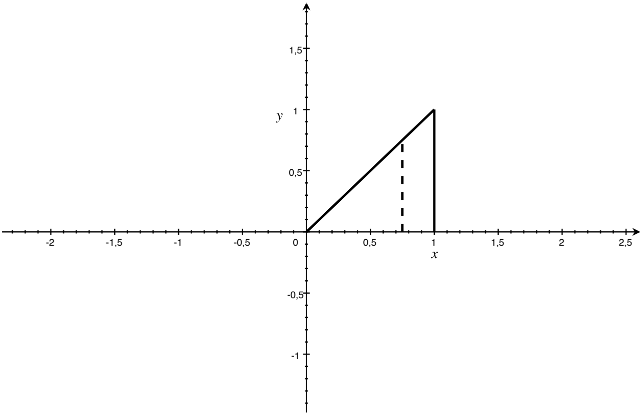


Figura: Si vede facilmente che A ha la proprietà: "affettando" l'insieme con una retta parallela all'asse y, si ottiene **sempre** un segmento, con estremi 0 e x.

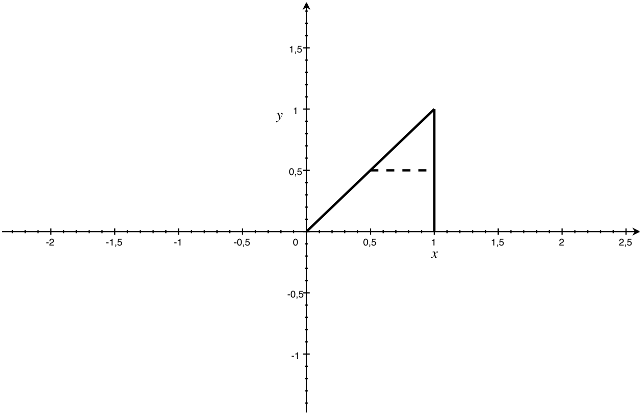


Figura: ...d'altra parte si vede anche che A ha anche la proprietà reciproca: "affettando" l'insieme con una retta parallela all'asse x, si ottiene **sempre** un segmento, con estremi...?

- fissato y, gli estremi di questo segmento sono dati da y e 1
- in effetti, se ruotate la testa verso destra di $\pi/2$, vi rendete conto che A può essere visto come la regione di piano compresa tra il grafico di $y \mapsto y$ e la costante 1
- in altre parole

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in [0, 1],\, y \leq x \leq 1\Big\}$$

- quindi effettivamente A è anche $x-$semplice!

- veniamo adesso all'insieme

$$B = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$$

- si tratta di un cerchio chiuso di centro $(0, 0)$ e raggio 1
- questo insieme ci sembra $y-$semplice

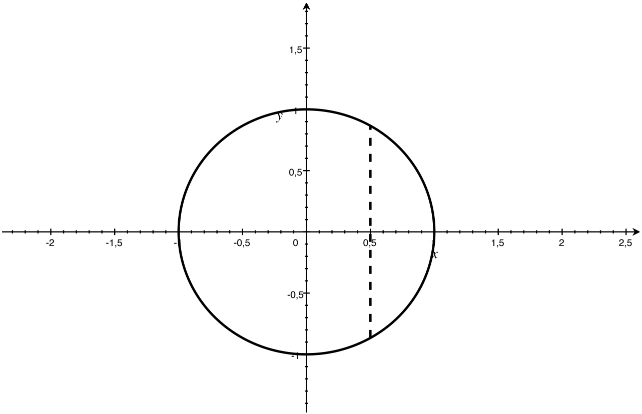


Figura: "Affettando" l'insieme con una retta parallela all'asse y, si ottiene **sempre** un segmento, con estremi....

- per scrivere B come insieme $y-$semplice, dobbiamo riscriverlo come regione di piano compresa tra due grafici di funzione $g_1(x)$ e $g_2(x)$
- osserviamo che la frontiera di B coincide con i punti (x, y) tali che

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad y^2 = 1 - x^2$$

- questo è possibile solo se $x \in [-1, 1]$ e di conseguenza vale

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{oppure} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

- abbiamo allora che il grafico di $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ ci da il pezzo di frontiera di B che sta "di sopra"
- ...il grafico di $x \mapsto -\sqrt{1 - x^2}$ ci da il pezzo di frontiera di B che sta "di sotto"

- detto in altri termini, possiamo scrivere

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [-1, 1],\, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$

- ovvero abbiamo scritto B come insieme $y-$semplice
- d'altronde, non è difficile vedere che potremmo anche scrivere

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in [-1, 1],\, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\}$$

- quindi B è anche $x-$semplice!

—

- infine, veniamo all'insieme

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

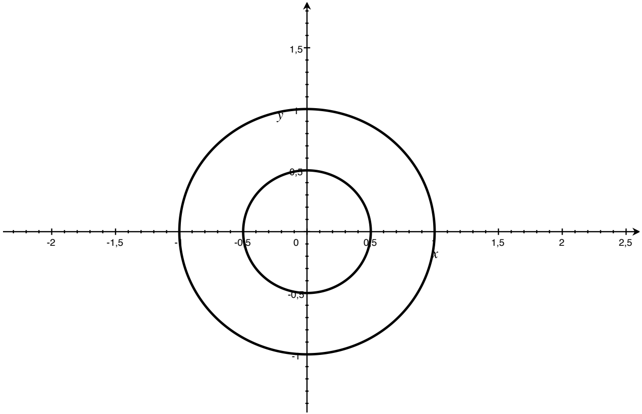


Figura: C è una corona circolare chiusa, con raggio interno $1/2$ e raggio esterno 1

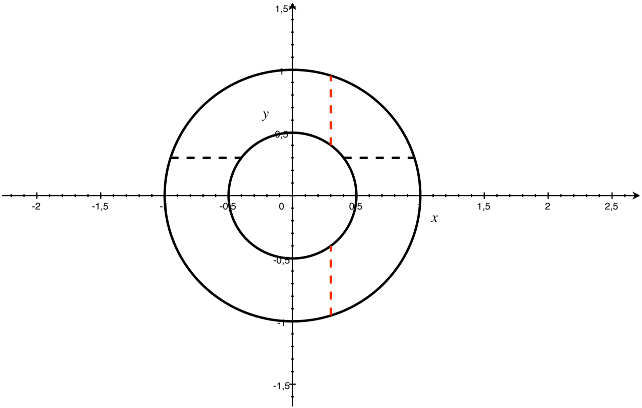


Figura: Questo insieme non è ne' $y-$semplice ne' $x-$semplice!

- tuttavia l'insieme C è **Riemann-regolare**
- più precisamente, si può scrivere come l'unione di **quattro** insiemi

$$E_1, E_2, E_3, E_4$$

  tutti $y-$semplici, che si intersecano a due a due lungo la frontiera

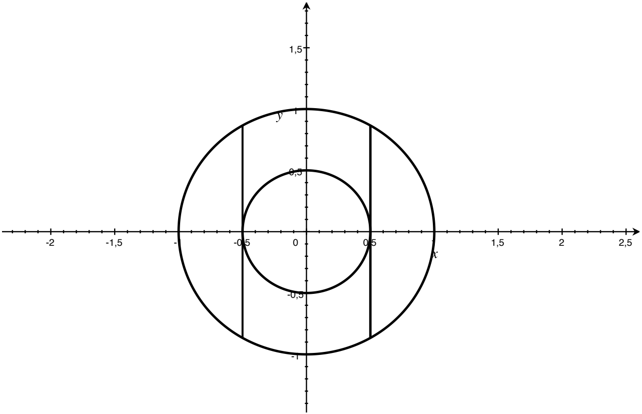
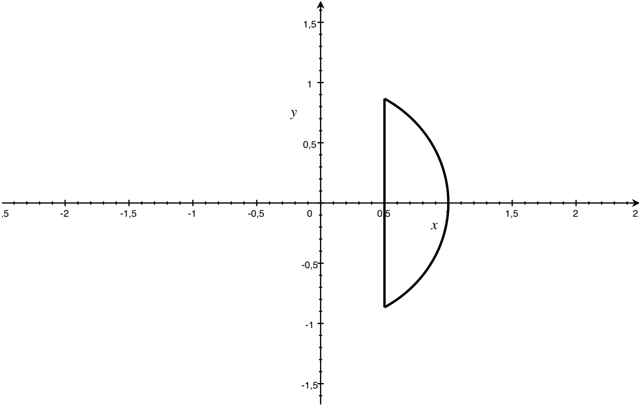


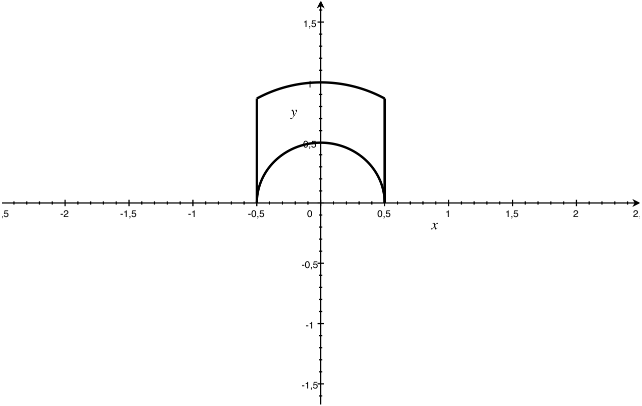
Figura: I quattro insiemi $y-$semplici E_1, E_2, E_3, E_4 che compongono la corona circolare

- osservando la figura e ricordando ciò che abbiamo fatto per il cerchio B, dovreste vedere che

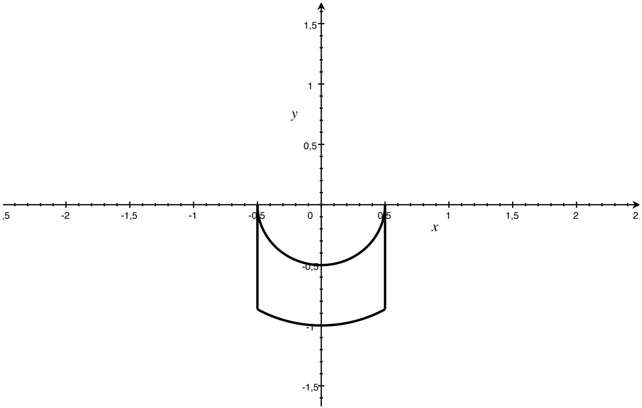
$$E_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$



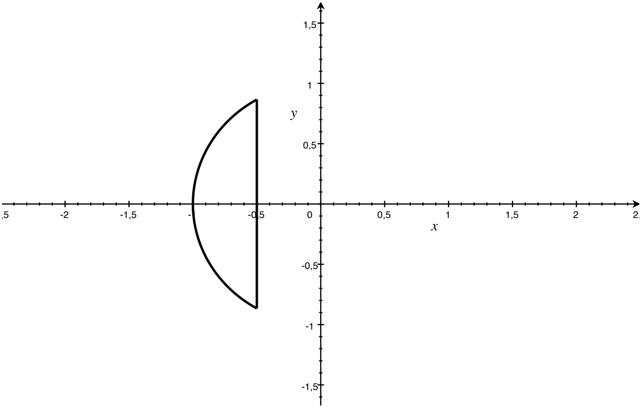
$$E_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2} \right\}$$



$$E_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le -\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \right\}$$



$$E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right],\; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$$



Teorema (integrali doppi y-semplici)

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme $y-$semplice, dato da

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [a, b],\, g_1(x) \le y \le g_2(x)\Big\}$$

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Allora f è Riemann integrabile su E

Inoltre il suo integrale doppio si calcola tramite la formula di "integrazione iterata"

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

In modo del tutto analogo, vale il

Teorema (integrali doppi x-semplici)

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme $x-$semplice, dato da

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \in [c, d],\, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\Big\}$$

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Allora f è Riemann integrabile su E

Inoltre il suo integrale doppio si calcola tramite la formula di "integrazione iterata"

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Infine, dai due precedenti, vale il

Corollario (integrali doppi Riemann-regolari)

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme Riemann-regolare, unione degli insiemi semplici $E_1, \dots, E_k$

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Allora f è Riemann integrabile su E

Inoltre il suo integrale doppio si calcola tramite

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{k} \iint_{E_i} f(x, y)\, dx\, dy$$

ed ognuno degli integrali doppi su E_i si calcola tramite "integrazione iterata"

Esercizio

Si calcoli l'integrale doppio seguente

$$\iint_S x\, y\, dx\, dy$$

dove S *è il semicerchio superiore di centro* $(1,0)$ *e raggio* 1

Soluzione

- Osserviamo che la funzione da integrare è sicuramente continua
- l'insieme di integrazione S è dato da

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0 \right\}$$

- tale insieme può essere riscritto come

$$\begin{aligned} S &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \le 1-(x-1)^2,\ y \ge 0\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \le 2\,x - x^2,\ y \ge 0\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,2],\ 0 \le y \le \sqrt{2\,x - x^2}\Big\} \end{aligned}$$

- nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che

$$2\,x - x^2 \ge 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [0,2]$$

- quindi possiamo vedere S come insieme $y-$semplice

- calcoliamo quindi l'integrale doppio tramite *integrazione iterata*

$$\begin{aligned}
\iint_S x\,y\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2\,x-x^2}} x\,y\,dy \right)\,dx \\
&= \int_0^2 \left[x\,\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2\,x-x^2}}\,dx \\
&= \int_0^2 \left[x\,\frac{(\sqrt{2\,x-x^2})^2}{2} \right]\,dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{2\,x^2-x^3}{2} \right]\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{8} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio per casa

In realtà, l'insieme S dell'esercizio precedente è anche $x-$semplice...ripetere quindi l'esercizio, considerando S come insieme $x-$semplice, stavolta