Analisi Matematica B
– *Lezione 20* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 13 Maggio 2020

Esercizio

Si calcoli

$$\iiint_C \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

dove

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 1,\ -2+2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 0\right\}$$

Soluzione

- Facciamo un disegno dell'insieme C
- osserviamo che si tratta di un insieme $z-$semplice

- dobbiamo disegnare il grafico della funzione radialmente simmetrica
$$f(x,y) = -2 + 2\sqrt{x^2+y^2}$$
sul dominio $\{(x,y)\,:\,x^2+y^2 \le 1\}$
- sappiamo come si fa (vedi *Lezione 5*): si disegna nel piano $x\,z$ la funzione di una variabile
$$f(x,0) = -2 + 2\,|x|$$
per $x \ge 0$ e poi lo si fa ruotare attorno all'asse delle z

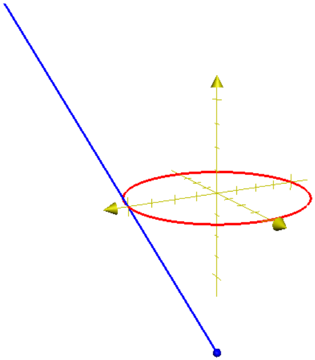


Figura: Il grafico della funzione $-2 + x$ per $x \geq 0$. Il punto blu ha coordinate $(0, 0, -2)$. Il cerchio rosso delimita l'insieme $\{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

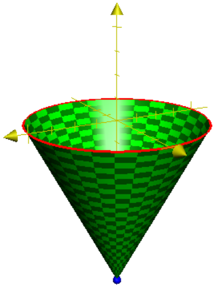


Figura: ...ruotando, si ottiene un cono retto “rivolto verso il basso”, avente vertice in $(0, 0, -2)$ e con base coincidente col cerchio di raggio 1 e centro l’origine

- l'insieme su cui integriamo è quindi tutto l'interno del cono
- proviamo a calcolare l'integrale triplo usando le coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\vartheta \\ y &= \varrho\sin\vartheta \\ z &= z \end{aligned}$$

- la variabile z è libera di muoversi tra -2 (vertice) e 0 (base)
- dalla simmetria rotazionale, si ha che $\vartheta \in [0, 2\pi]$
- ci resta da capire l'intervallo in cui varia ϱ
- ricordando che in coordinate cilindriche risulta $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$-2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} \le z \qquad \text{equivale a} \qquad -2 + 2\varrho \le z$$

- usando le coordinate cilindriche, il nostro insieme C diventa quindi

$$\Omega = \left\{ (\varrho, \vartheta, z) \,:\, (\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times [-2, 0],\ 0 \leq \varrho \leq \frac{z+2}{2} \right\}$$

che è $\varrho-$semplice

- in base alla formula di cambio di variabili, abbiamo allora

$$\begin{aligned}\iiint_C \sqrt[3]{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz &= \iiint_\Omega \varrho^{\frac{2}{3}}\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta\, dz \\ &= \iint_{[0,2\,\pi]\times[-2,0]} \left(\int_0^{\frac{z+2}{2}} \varrho^{\frac{5}{3}}\, d\varrho \right) d\vartheta\, dz \\ &= \frac{3}{8} \iint_{[0,2\,\pi]\times[-2,0]} \left(\frac{z+2}{2} \right)^{\frac{8}{3}} d\vartheta\, dz\end{aligned}$$

- proseguendo, si ha

$$
\begin{aligned}
\iiint_C \sqrt[3]{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz &= \frac{3}{8}\iint_{[0,2\pi]\times[-2,0]} \left(\frac{z+2}{2}\right)^{\frac{8}{3}}\, d\vartheta\, dz \\
&= \frac{3}{8}\int_{-2}^{0}\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left(\frac{z+2}{2}\right)^{\frac{8}{3}}\, dz \\
&= \frac{3\pi}{4}\int_{-2}^{0}\left(\frac{z+2}{2}\right)^{\frac{8}{3}}\, dz \\
&\overset{z=2t}{=} \frac{3\pi}{2}\int_{-1}^{0}(t+1)^{\frac{8}{3}}\, dt \\
&= \frac{3\pi}{2}\left[\frac{3}{11}(t+1)^{\frac{11}{3}}\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{9\pi}{22}
\end{aligned}
$$

Esercizio per casa

Sia S la palla chiusa centrata in $(3,2,1)$ ed avente raggio 1. Si determinino gli integrali tripli

$$\iiint_S x^2\, dx\, dy\, dz \qquad e \qquad \iiint_S z^2\, dx\, dy\, dz.$$

Si calcoli infine il momento d'inerzia di S rispetto all'asse delle y

Suggerimento

- Provate ad usare le coordinate sferiche ma **attenzione**
- dovete "centrarle" nel punto giusto, altrimenti è difficilissimo descrivere l'insieme S
- in altre parole, conviene prendere

$$\begin{aligned} x &= 3 + \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= 2 + \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= 1 + \varrho \cos\varphi \end{aligned}$$

Esercizio

Si consideri una palla di raggio 2, realizzata in legno

Con una punta di trapano a sezione circolare, si effettua un foro trapassando la palla dal "polo nord" al "polo sud"

Supponendo che il raggio del foro sia $r = 1$, si determini il volume dell'insieme così ottenuto

Soluzione

- Supponiamo per semplicità che la palla sia centrata in $(0, 0, 0)$
- si tratta di calcolare il volume di questa palla, a cui viene rimosso un cilindro, avente come asse di simmetria rotazionale l'asse delle z
- chiamiamo E questo insieme
- come sempre, cerchiamo di fare un disegno per capire la situazione

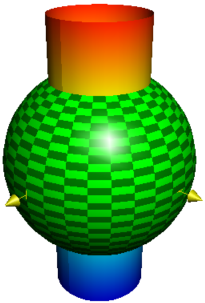


Figura: La palla di legno di raggio 2. A colori, la punta del trapano a sezione circolare, che trapassa la palla.

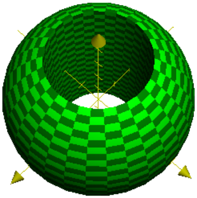


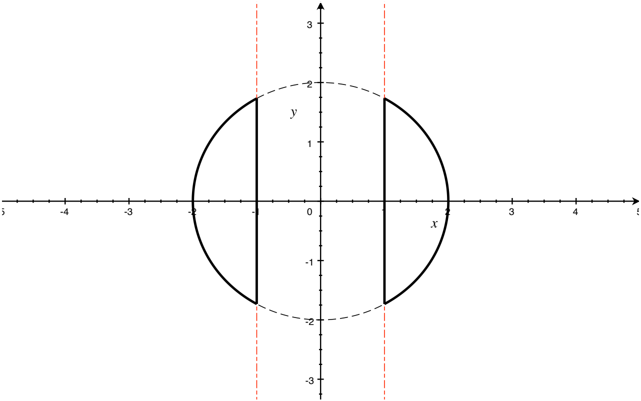
Figura: ...sporgendoci un po' dall'alto, ecco come risulta l'insieme E

- l'insieme E ha dei legami sia con la palla che con il cilindro...
- ci conviene usare le coordinate sferiche o quelle cilindriche? per calcolare
$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint_E dx\,dy\,dz$$
- proviamole entrambe! Così ci esercitiamo

1. <u>Primo metodo: coordinate cilindriche</u>

- facciamo quindi il cambio di variabili
$$\begin{array}{rcl} x &=& \varrho\cos\vartheta \\ y &=& \varrho\sin\vartheta \\ z &=& z \end{array}$$

- proviamo a descrivere l'insieme E con queste nuove variabili
- per questo, ci conviene disegnare la sezione di E sul piano $y\,z$



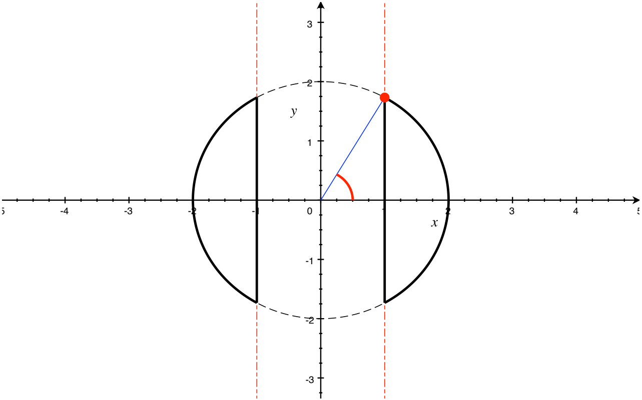


Figura: Dal momento che E ha simmetria rotazionale rispetto all'asse delle z, la variabile ϑ sarà libera di muoversi in $[0, 2\pi]$.La variabile "quota" z invece deve muoversi tra la quota del punto rosso e (per simmetria) il suo opposto

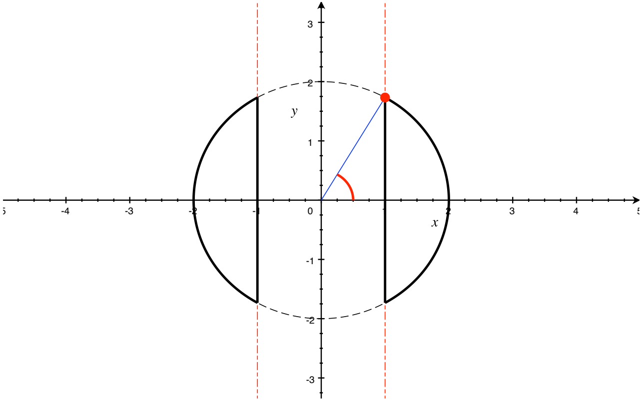


Figura: Per trovare la quota del punto rosso, uso un po' di trigonometria sul triangolo rettangolo evidenziato: l'ipotenusa (in blu) è uguale al raggio della palla (quindi vale 2), il cateto adiacente all'angolo rosso è lungo 1 (il raggio del foro effettuato)...

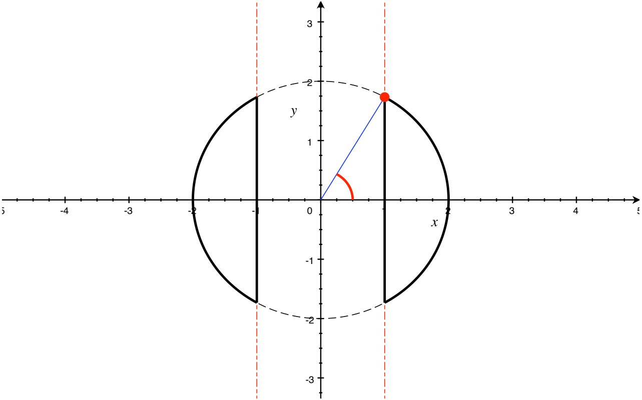


Figura: ...abbiamo quindi che l'angolo rosso φ_0 è tale che $2\cos\varphi_0 = 1$, ovvero $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}$. La quota del punto rosso è quindi data dalla formula "ipotenusa $\times \sin\varphi_0$" ovvero $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$

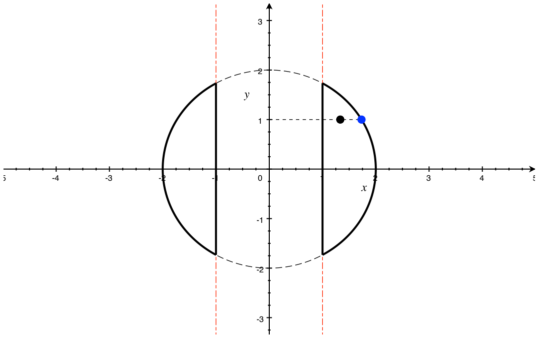
- abbiamo quindi scoperto che usando le coordinate cilindriche

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho\cos\vartheta \\ y & = & \varrho\sin\vartheta \\ z & = & z \end{array}$$

il nostro insieme E si descrive prendendo

$$\vartheta \in [0, 2\,\pi], \qquad z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \qquad \varrho \in ?$$

- ci manca da capire dove varia ϱ, che rappresenta la distanza dei punti di E dall'asse delle z



Dato un punto generico (in nero), la sua distanza ϱ dall'asse delle z varia tra 1 (corrispondente a stare sul bordo del foro) e la distanza dall'asse delle z del punto blu. Il punto si trova sulla frontiera della palla, quindi le sue coordinate sono tali che $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ovvero $\varrho^2 = 4 - z^2$ da cui

$$\varrho = \sqrt{4 - z^2}$$

- ricapitolando, usando le coordinate cilindriche

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho\cos\vartheta \\ y & = & \varrho\sin\vartheta \\ z & = & z \end{array}$$

il nostro insieme E si descrive prendendo

$$\vartheta \in [0, 2\,\pi], \qquad z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}], \qquad 1 \leq \varrho \leq \sqrt{4 - z^2}$$

- dopo cambio di variabili, il nuovo insieme di integrazione sarà quindi

$$\Omega = \Big\{(\varrho, \vartheta, z) \,:\, (\vartheta, z) \in [0, 2\pi] \times [-\sqrt{3}, \sqrt{3}],\, 0 \leq \varrho \leq \sqrt{4 - z^2}\Big\}$$

che è $\varrho-$semplice

- siamo quindi pronti a calcolare il volume di E
- usando la formula del cambio di variabili, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= \iiint_E dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_\Omega \varrho\,d\varrho\,d\vartheta\,dz \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times[-\sqrt{3},\sqrt{3}]} \left(\int_1^{\sqrt{4-z^2}} \varrho\,d\varrho\right) d\vartheta\,dz \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times[-\sqrt{3},\sqrt{3}]} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{4-z^2}} d\vartheta\,dz \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times[-\sqrt{3},\sqrt{3}]} \left[\frac{(4-z^2)-1}{2}\right] d\vartheta\,dz
\end{aligned}
$$

- proseguendo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= \iint_{[0,2\,\pi]\times[-\sqrt{3},\sqrt{3}]} \left[\frac{(4-z^2)-1}{2}\right]\, d\vartheta\, dz \\
&= \iint_{[0,2\,\pi]\times[-\sqrt{3},\sqrt{3}]} \left[\frac{3-z^2}{2}\right]\, d\vartheta\, dz \\
&= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\,\pi} d\vartheta\right)\, \left[\frac{3-z^2}{2}\right]\, dz \\
&= \pi\, \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-z^2)\, dz \\
&= \pi\, \left[3\,z - \frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 4\,\pi\,\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

1. Secondo metodo: coordinate sferiche

- proviamo adesso col cambio di variabili

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\varphi \end{aligned}$$

- il significato dell'angolo ϑ è sempre lo stesso, quindi di nuovo dalla simmetria rotazionale si ha che

$$\vartheta \in [0, 2\pi]$$

- l'intervallo di variazione dell'angolo φ (inclinazione rispetto all'asse delle z) l'abbiamo sostanzialmente già determinato prima

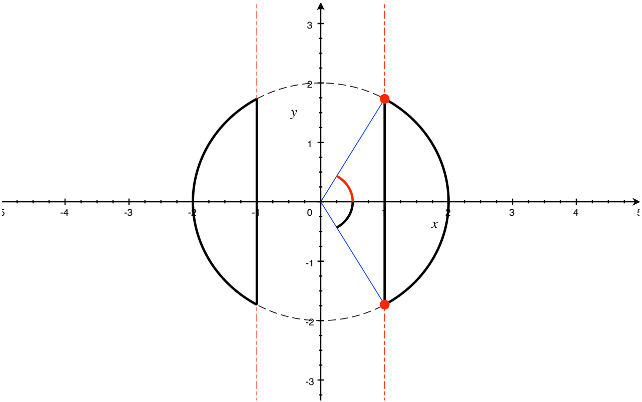


Figura: Ricordando che l'angolo rosso è $\dfrac{\pi}{3}$ e che l'angolo φ misura l'inclinazione dall'asse delle z, abbiamo che φ varia tra $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5}{6}\pi$

- per il momento, abbiamo scoperto che usando le coordinate sferiche
$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\vartheta\,\sin\varphi \\ y &= \varrho\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= \varrho\cos\varphi \end{aligned}$$
il nostro insieme E si descrive prendendo
$$\vartheta \in [0, 2\,\pi], \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\,\pi\right], \qquad \varrho \in ?$$
- ci manca da capire dove varia ϱ, ovvero la distanza dei punti di E dall'origine

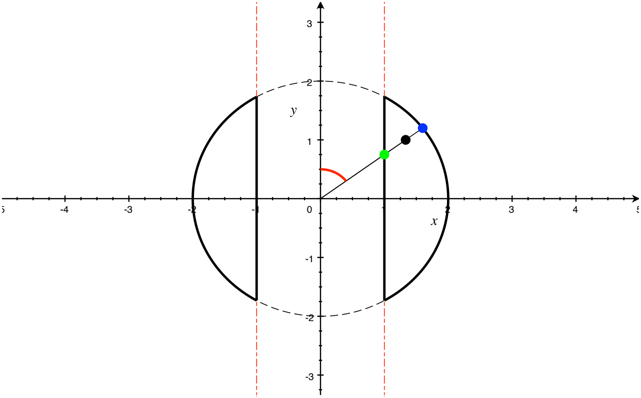


Figura: Dato un punto generico (in nero), il suo modulo varia tra quello del punto verde e quello del punto blu. Il modulo del punto blu è 2, perché si trova sulla frontiera della palla. Per il modulo del punto verde, usiamo un po' di trigonometria: la lunghezza che ci interessa è quella dell'ipotenusa...

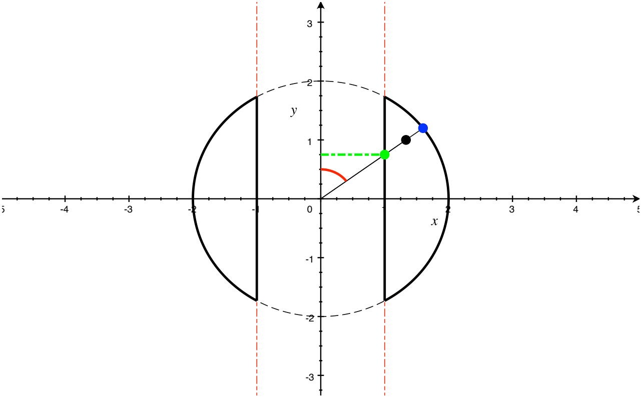


Figura: ...noi conosciamo il cateto verde (lungo 1, raggio del foro) e l'angolo rosso (esso è φ). Quindi il ϱ limite che cerchiamo è tale che $\varrho \sin\varphi = 1$ ovvero $\boxed{\varrho = \dfrac{1}{\sin\varphi}}$

- in conclusione, abbiamo che usando le coordinate sferiche

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho\cos\vartheta\,\sin\varphi \\ y & = & \varrho\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z & = & \varrho\cos\varphi \end{array}$$

il nostro insieme E si descrive prendendo

$$\vartheta\in[0,2\,\pi],\qquad \varphi\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\,\pi\right],\qquad \frac{1}{\sin\varphi}\le\varrho\le 2$$

- dopo cambio di variabili, il nuovo insieme di integrazione sarà quindi

$$\Omega=\left\{(\varrho,\vartheta,z)\,:\,(\vartheta,\varphi)\in[0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\,\pi\right],\,\frac{1}{\sin\varphi}\le\varrho\le 2\right\}$$

che è $\varrho-$semplice

- siamo quindi pronti a calcolare (nuovamente!) il volume di E
- usando la formula del cambio di variabili, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= \iiint_E dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_\Omega \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right]} \left(\int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{2} \varrho^2\, d\varrho\right) \sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi \\
&= \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right]} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{2} \sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi \\
&= \frac{1}{3} \iint_{[0,2\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right]} \left[8 - \frac{1}{\sin^3\varphi}\right] \sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi
\end{aligned}$$

- integrando poi in ϑ si arriva a

$$\mathrm{Vol}(E) = \frac{2\,\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\,\pi} \left[8\,\sin\varphi - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right]\,d\varphi$$

- per calcolare quest'ultimo integrale, basta osservare che (verificatelo!)

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{\tan\varphi} = -\frac{1}{\tan^2\varphi}\,\frac{1}{\cos^2\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi}$$

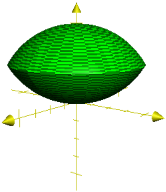
- finite l'esercizio per casa

Esercizio per casa (proposto da H. I.)

Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_S z^2\,dx\,dy\,dz,$$

dove S è il solido tridimensionale ottenuto intersecando due palle chiuse di raggio 1, una centrata in $(0,0,0)$ e l'altra in $(0,0,1)$



VII.6 Integrali di superficie

Integrale di superficie

Sia $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare

Sia $h : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con $E \subset \mathbb{R}^3$ aperto e tale che

$$\mathrm{Im}(\phi) \subset E$$

Si definisce l'**integrale superficiale di h sul sostegno di ϕ** come la quantità

$$\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} h(x,y,z)\, d\sigma(x,y,z) = \iint_{\overline{A}} h(\phi(t,s)) \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \right| dt\, ds$$

Elemento infinitesimo di area superficiale

Si osservi che vale l'uguaglianza formale

$$\boxed{d\sigma(x,y,z) = \left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial\phi}{\partial s}(t,s)\right| \, dt\, ds}$$

Memento

Per fare un parallelo con gli **integrali curvilinei**, ricordate che se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ era curva regolare si aveva

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} h(x,y,z)\, d\ell(x,y,z) = \int_a^b h(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt$$

da cui l'elemento infinitesimo di lunghezza era

$$\boxed{d\ell(x,y,z) = |\gamma'(t)|\, dt}$$

Esercizio

Si calcoli l'integrale della funzione costante $h(x, y, z) = 1$ su una sfera Σ di raggio R

Soluzione

- Possiamo considerare che la sfera Σ sia centrata nell'origine
- dalla *Lezione 13* sappiamo che se il raggio $R = 1$, allora Σ coincide con il sostegno della superficie

  $$\phi(t, s) = \Big(\cos t\ \sin s, \sin t\ \sin s, \cos s\Big)$$

  con $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- per un raggio generico $R > 0$, basta "dilatare" questo vettore di un fattore R, ovvero prendere

  $$\phi(t, s) = \Big(R\ \cos t\ \sin s, R\ \sin t\ \sin s, R\ \cos s\Big)$$

- abbiamo quindi dalla formula per gli integrali di superficie

$$\iint_{\Sigma} d\sigma(x,y,z) = \iint_{A} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \right| \, dt \, ds$$

dove $A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ e (vedi *Lezione 13*)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} &= \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin t \sin s & R \cos t \sin s & 0 \\ R \cos t \cos s & R \sin t \cos s & -R \sin s \end{vmatrix} \\
&= R^2 \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t \sin s & \cos t \sin s & 0 \\ \cos t \cos s & \sin t \cos s & \sin s \end{vmatrix} \\
&= R^2 \left(-\cos t \sin^2 s, -\sin t \sin^2 s, -\cos s \sin s \right)
\end{aligned}$$

- quindi (vedi sempre *Lezione 13* per il dettaglio del calcolo)

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\times\frac{\partial\phi}{\partial s}\right| = R^2\,\sin s$$

- in definitiva, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma d\sigma(x,y,z) &= \iint_A \left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,s)\times\frac{\partial\phi}{\partial s}(t,s)\right|\,dt\,ds\\ &= R^2\iint_{[0,2\,\pi]\times[0,\pi]}\sin s\,ds\,dt\\ &= R^2\int_0^\pi\left(\int_0^{2\,\pi}dt\right)\sin s\,ds\\ &= 2\,\pi\,R^2\int_0^\pi\sin s\,ds = 4\,\pi\,R^2\end{aligned}$$

Caso particolare: superfici cartesiane

Nel caso si abbia a che fare con una **superficie cartesiana**

ovvero

nel caso in cui ϕ sia della forma

$$\phi(t,s) = (t, s, f(t,s))$$

con $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1

la formula dell'integrale di superficie assume la forma seguente

$$\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} h(x,y,z)\, d\sigma(x,y,z) = \iint_A h(t,s,f(t,s)) \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dt\, ds$$

Si ricordi infatti che per una superficie cartesiana

$$\phi(t,s) = (t, s, f(t,s))$$

vale

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \right| = \sqrt{1 + |\nabla f(t,s)|^2}$$

si veda *Lezione 14*

Adattiamo al caso dei sostegni di superfici la definizione di **area**, **baricentro** e **momento d'inerzia**

Definizione

Sia $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare

Si definisce l'**area del sostegno della superficie** ϕ come la quantità

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\mathrm{Im}(\phi)) &= \iint_{\mathrm{Im}(\phi)} d\sigma(x,y,z) \\ &= \iint_A \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \right| \, dt \, ds\end{aligned}$$

Definizione

Sia $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare.

Si definisce **baricentro del sostegno della superficie** ϕ come il punto $\mathbf{b}^\phi = (b_1^\phi, b_2^\phi, b_3^\phi)$, le cui coordinate sono definite da

$$b_1^\phi = \frac{1}{\mathrm{Area}(\mathrm{Im}(\phi))} \iint_{\mathrm{Im}(\phi)} x \, d\sigma(x, y, z),$$

$$b_2^\phi = \frac{1}{\mathrm{Area}(\mathrm{Im}(\phi))} \iint_{\mathrm{Im}(\phi)} y \, d\sigma(x, y, z),$$

$$b_3^\phi = \frac{1}{\mathrm{Area}(\mathrm{Im}(\phi))} \iint_{\mathrm{Im}(\phi)} z \, d\sigma(x, y, z).$$

Definizione

Sia $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $\mathfrak{R}$ una retta in $\mathbb{R}^3$

Si definisce il **momento di inerzia del sostegno della superficie ϕ rispetto alla retta** $\mathfrak{R}$ come la quantità

$$\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} \left(\mathrm{dist}((x,y,z),\mathfrak{R})\right)^2 d\sigma(x,y,z)$$

Come sempre, la quantità $\mathrm{dist}((x,y,z),\mathfrak{R})$ è la distanza del punto (x,y,z) dalla retta $\mathfrak{R}$

Per casa, fate il seguente

Esercizio (Compito del 21/01/2020)

Si calcoli il momento d'inerzia dell'insieme

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 1 \leq z \leq 2\right\}$$

rispetto all'asse delle z

Suggerimento

- Potete considerare Σ come il sostegno della superficie cartesiana
$$\phi(t, s) = (t, s, f(t, s))$$
dove
$$f(t, s) = \sqrt{t^2 + s^2}$$
è definita su $A = ...?$

Esercizio (Finestra di Viviani)

Definiamo gli insiemi

$$C_+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\, z \geq 0\right\},$$

e

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4},\, z \in \mathbb{R}\right\}$$

Si calcoli l'area della finestra di Viviani, *ovvero l'insieme V ottenuto come intersezione $C_+ \cap T$*

Soluzione

- Cerchiamo di capire innanzitutto chi sono C_+ e T
- L'insieme C_+ è la calotta superiore della sfera di raggio 1 e centro $(0,0,0)$
- ricordiamo che C_+ può essere visto come il grafico della funzione radialmente simmetrica

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

definita su

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

- quindi possiamo vedere C_+ come il sostegno di una superficie cartesiana

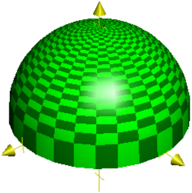


Figura: La calotta superiore C_+ vista da sopra...

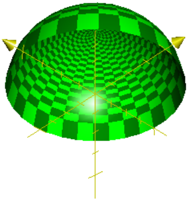


Figura: ...e vista da sotto (si noti che è un oggetto bidimensionale, consideriamo solo la “buccia” della palla)

- occupiamoci adesso di T

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- l'equazione
$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$$
corrisponde a prendere un disco nel piano $x\,y$ di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$
- la terza variabile z, ovvero la "quota", invece è libera di muoversi in $\mathbb{R}$
- quindi T è formato da tutti i punti dello spazio, la cui proiezione sul piano $x\,y$ appartenga al disco sopra citato...
- ...trattasi quindi di un cilindro "pieno" (si considera anche lo spazio racchiuso)

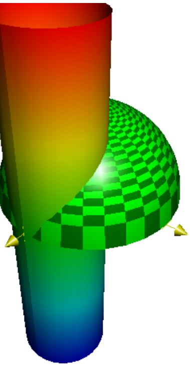


Figura: Intersechiamo la calotta C_+ con il cilindro “pieno” T, costruito a partire dal cerchio di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$ nel piano $x\,y$...

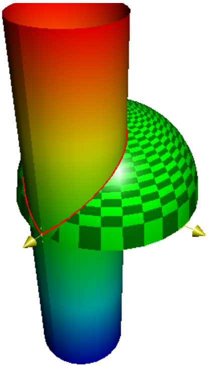


Figura: ...si ottiene un sottoinsieme della calotta C_+, delimitato dalla curva rossa...

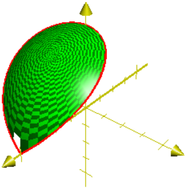


Figura: ...ovvero V è questo insieme (facciamo sparire tutto ciò che non fa parte dell'intersezione)

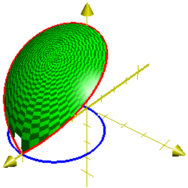


Figura: Ricordando che la calotta superiore può essere vista come il grafico di $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, abbiamo che V può essere visto come il grafico di f, limitatamente al dominio circondato dalla curva blu. Questo non è altro che la sezione del cilindro, ovvero il disco di equazione $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$

- alla fine di questa discussione, abbiamo che V coincide col grafico della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

sul dominio

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\},$$

- ovvero V è il sostegno di una superficie cartesiana
- la sua area è quindi data da

$$\mathrm{Area}(V) = \iint_A \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy$$

dalla formula generale, applicata nel caso di superfici cartesiane

- non ci resta quindi che calcolarci il fattore d'area

$$\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}$$

  e svolgere l'integrale doppio!
- osservando che

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$$

  si ottiene

$$|\nabla f(x,y)|^2 = \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2} = \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$$

- ...da cui si ha

$$\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2} = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

- abbiamo quindi

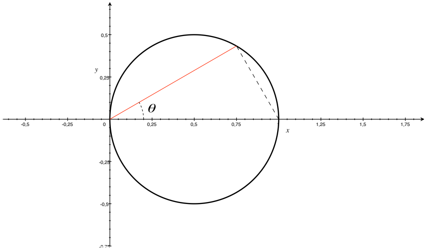
$$\mathrm{Area}(V) = \iint_A \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy = \iint_A \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

- la funzione da integrare è radialmente simmetrica, l'insieme di integrazione A è un cerchio (attenzione! non è centrato nell'origine)
- proviamo con le coordinate polari

- facciamo quindi il cambio di variabili

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \cos \vartheta \\
y &= \varrho \sin \vartheta
\end{aligned}
$$

- dobbiamo descrivere nelle coordinate ϱ, ϑ il cerchio "spostato" A



- abbiamo già incontrato questa situazione nella *Lezione 18*

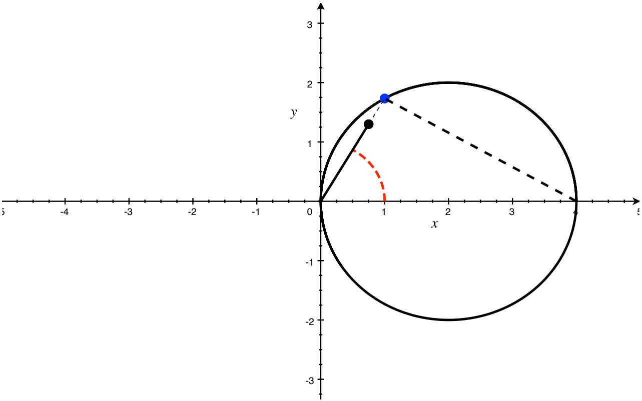


Figura: Prendiamo un punto qualsiasi (in nero) all'interno del cerchio A. L'angolo in rosso rappresenta ϑ, che dovrà quindi variare tra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Per ogni ϑ fissato, la distanza massima dall'origine ϱ non è fissata, ma dipende dall'angolo ϑ stesso...

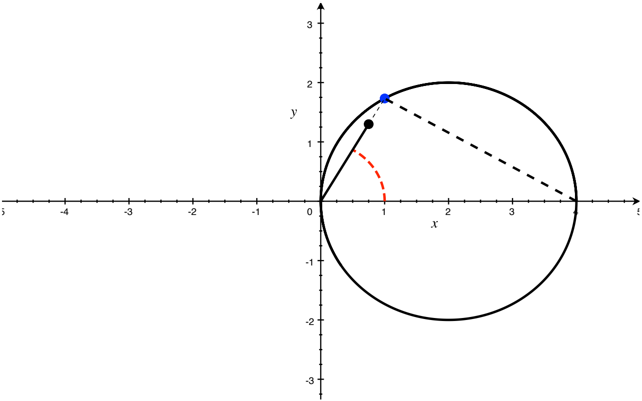


Figura: Lavoriamo sul triangolo rettangolo ottenuto prolungando il raggio vettore fino a incontrare ∂A (punto blu). Fissato ϑ come in figura, il modulo ϱ del punto nero è minore o uguale alla lunghezza del cateto compreso tra "punto blu" e l'origine. Questa lunghezza, dalla trigonometria, sappiamo che è $\boxed{\cos\vartheta}$ (infatti 1 è la lunghezza dell'ipotenusa, che coincide con il diametro del cerchio, che si ricordi ha raggio 1/2)

- quindi l'insieme di integrazione A si descrive in coordinate polari come

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \varrho \leq \cos\vartheta$$

- in altre parole, il nuovo insieme di integrazione sarà

$$\Omega = \left\{(\varrho, \vartheta) \,:\, \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq \varrho \leq \cos\vartheta\right\}$$

  che è $\varrho-$semplice

- siamo infine pronti a svolgere l'integrale per determinare l'area di V

- abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(V) &= \iint_A \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy \\
&= \iint_A \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy \\
&= \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\vartheta} \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}\, d\varrho \right) d\vartheta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\vartheta} \varrho\,(1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\varrho \right) d\vartheta
\end{aligned}$$

- osservando che

$$\frac{d}{d\varrho}(1-\varrho^2)^{\frac{1}{2}} = -\varrho\,(1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- otteniamo allora

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(V) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\vartheta} \varrho\,(1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\varrho\right)\,d\vartheta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[-(1-\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^{\cos\vartheta}\,d\vartheta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sqrt{1-\cos^2\vartheta}\right)d\vartheta \\
&= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin\vartheta|\,d\vartheta
\end{aligned}$$

- infine, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(V) &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin\vartheta|\, d\vartheta \\ &= \pi - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta \\ &= \pi + 2\Big[\cos\vartheta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2\end{aligned}$$