Analisi Matematica B
– *Lezione 21* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 19 Maggio 2020

Capitolo VIII – FINALE

“*Campi vettoriali*”

VIII.1 Introduzione

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto non vuoto

Un **campo vettoriale su** A è una funzione $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$, ovvero

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Big(F_1(\mathbf{x}), \dots, F_N(\mathbf{x})\Big), \qquad \text{per } \mathbf{x} \in A$$

le funzioni $F_i : A \to \mathbb{R}$ si dicono **componenti** di $\mathbf{F}$

Osservazione

Nei casi $N = 2$ o $N = 3$, si usano anche le notazioni

$$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\,\mathbf{i} + F_2(x, y)\,\mathbf{j},$$

e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

Definizione

Un campo vettoriale $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ si dice

- **continuo su** A se ogni sua componente è una funzione continua su A
- **di classe** $C^1(A)$ se ogni sua componente è una funzione di classe C^1 su A

Matrice Jacobiana

Nel caso in cui $\mathbf{F}$ sia $C^1(A)$, indicheremo ancora con $J\mathbf{F}$ la **matrice Jacobiana** (vedi *Lezioni 17, 18 & 19*), ovvero la matrice $N \times N$ ottenuta mettendo <u>in riga</u> i gradienti

$$\nabla F_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla F_N(\mathbf{x})$$

Esempio (Legge di gravitazione universale)

Un pianeta X avente massa m si trova nel sistema solare

Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane $3-$dimensionali e mettiamo il *sole* nell'origine $(0,0,0)$

Indichiamo con m_S la massa del sole

Secondo la **legge di gravitazione universale**, il pianeta X è soggetto ad una forza di attrazione diretta verso il sole, la cui intensità è data dalla formula

$$\frac{G\,m\,m_S}{r^2},$$

dove

- G è la costante di gravitazione universale
- r è la distanza del pianeta X dal sole

Formalizziamo questa situazione tramite un **campo vettoriale**

Indichiamo con (x, y, z) la posizione del pianeta X nel sistema solare, osserviamo che

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

è il versore che punta dall'origine verso la posizione (x, y, z)

In base alla **legge di gravitazione universale** sappiamo allora che il pianeta X risente di una forza $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ che è diretta come

$$-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Osserva: il segno "-" tiene conto del fatto che il pianeta X è "attratto" dal sole, quindi il vettore deve puntare dalla posizione (x, y, z) verso l'origine (e non viceversa)

Inoltre, abbiamo detto che l'intesità di questa forza deve essere

$$\frac{G\, m\, m_S}{r^2},$$

ovvero

$$|\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}| = \frac{G\, m\, m_S}{r^2}$$

Osserviamo che la distanza dal sole r coincide proprio con la distanza dall'origine del punto (x, y, z), ovvero

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

In conclusione, il pianeta X è soggetto al **campo di forze gravitazionale**

$$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3,$$

definito da

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(x,y,z) &= -\frac{G\,m\,m_S}{x^2+y^2+z^2} \\ &\quad \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)\end{aligned}$$

In notazione compatta, si può anche scrivere

$$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(\mathbf{x}) = -\frac{G\,m\,m_S}{|\mathbf{x}|^2}\,\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Osservazione

Il campo vettoriale $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ ha una struttura un po' particolare:

se si definisce la funzione radialmente simmetrica

$$U_{\mathrm{grav}}(x,y,z) = \frac{G\,m\,m_S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

non è difficile vedere che

$$\boxed{\nabla U_{\mathrm{grav}}(x,y,z) = \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(x,y,z)}, \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

(*provatelo per esercizio!* Per la derivata della funzione modulo, ricordatevi delle *Lezioni 7 & 9*)

La funzione U_{grav} si chiama **potenziale gravitazionale**

Vedremo che i campi vettoriali di questa forma (ovvero che sono gradienti di qualche funzione), hanno proprietà notevoli...

....tutto a suo tempo ("*Prof! Il corso sta per finire!*")

VIII.2 Lavoro di un campo vettoriale

Definizione

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale continuo su $A \subset \mathbb{R}^N$

Sia $\gamma : [a, b] \to A$ curva regolare a tratti, si definisce il **lavoro di F lungo il sostegno di** γ come l'integrale di linea

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_\gamma(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(\mathbf{x})$$

dove ricordiamo che $\mathbf{T}_\gamma$ è il *versore tangente* (vedi *Lezione 2*)

Commento

Interpretando $\mathbf{F}$ come un campo di forze e $\mathbf{T}\, d\ell$ come uno spostamento infinitesimo, il prodotto scalare

$$\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_\gamma(\mathbf{x}) \rangle$$

ha il significato fisico di **lavoro infinitesimo** di **F**
"Sommando" tutti questi contributi (ovvero integrando), si trova il lavoro complessivo

Osservazione

Ricordando la definizione di integrale di linea (vedi *Lezione 15*) e quella di versore tangente, si ha dunque

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_\gamma(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(x) = \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right\rangle |\gamma'(t)| \, dt$$

$$= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo usato la proprietà di bilinearità del prodotto scalare, per "portare fuori" lo scalare

$$\frac{1}{|\gamma'(t)|}$$

Lavoro e riparametrizzazioni

Il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il sostegno di γ è invariante rispetto a riparametrizzazioni <u>che conservano l'orientazione</u>

Infatti, se

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [c, d] \to \mathbb{R}^N$$

è una riparametrizzazione di γ, con

$$\phi : [c, d] \to [a, b] \qquad \text{derivabile crescente}$$

in base alla definizione di lavoro si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Im}(\widetilde{\gamma})} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_{\widetilde{\gamma}}(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(\mathbf{x}) &= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\widetilde{\gamma}(\tau)), \widetilde{\gamma}'(\tau) \rangle \, d\tau \\ &= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\gamma(\phi(\tau))), \gamma'(\phi(\tau)) \, \phi'(\tau) \rangle \, d\tau\end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $t = \phi(\tau)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Im}(\widetilde{\gamma})} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_{\widetilde{\gamma}}(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(\mathbf{x}) &= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\widetilde{\gamma}(\tau)), \widetilde{\gamma}'(\tau) \rangle \, d\tau \\
&= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\gamma(\phi(\tau))), \gamma'(\phi(\tau))\, \phi'(\tau) \rangle \, d\tau \\
&= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_{\gamma}(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Lavoro e riparametrizzazioni (bis!)

Il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il sostegno di γ **cambia di segno** rispetto a riparametrizzazioni <u>che invertono l'orientazione</u>

Infatti, se

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [c, d] \to \mathbb{R}^N$$

è una riparametrizzazione di γ, con

$$\phi : [c, d] \to [a, b] \qquad \text{derivabile decrescente}$$

in base alla definizione di lavoro, esattamente come prima, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Im}(\widetilde{\gamma})} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_{\widetilde{\gamma}}(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(\mathbf{x}) &= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\widetilde{\gamma}(\tau)), \widetilde{\gamma}'(\tau) \rangle \, d\tau \\ &= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\gamma(\phi(\tau))), \gamma'(\phi(\tau)) \, \phi'(\tau) \rangle \, d\tau\end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $t = \phi(\tau)$....attenzione qua!
Adesso ϕ è decrescente, quindi inverte gli estremi di integrazione

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Im}(\widetilde{\gamma})} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_{\widetilde{\gamma}}(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(\mathbf{x}) &= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\widetilde{\gamma}(\tau)), \widetilde{\gamma}'(\tau) \rangle \, d\tau \\
&= \int_c^d \langle \mathbf{F}(\gamma(\phi(\tau))), \gamma'(\phi(\tau)) \, \phi'(\tau) \rangle \, d\tau \\
&= \int_b^a \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= - \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= - \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_{\gamma}(\mathbf{x}) \rangle \, d\ell(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Fate quindi attenzione

il lavoro di un campo vettoriale lungo un sostegno $\mathrm{Im}(\gamma)$, dipende dal verso in cui lo si percorre!

Esercizio

Dato il campo vettoriale bidimensionale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x),$$

calcolarne il lavoro lungo un cerchio di raggio R *e centro* $(0, 0)$, *percorso in senso anti-orario*

Soluzione

- Possiamo considerare il cammino assegnato come il sostegno della curva

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

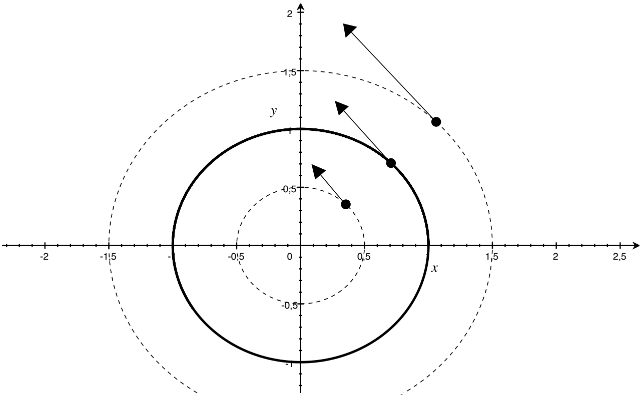
- si osservi che effettivamente γ percorre il cammino in senso anti-orario

- osserviamo che
$$\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$$
da cui
$$\mathbf{F}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (-\gamma_2(t), \gamma_1(t)) = (-R\ \sin t, R\ \cos t)$$

- inoltre si ha $\gamma'(t) = (-R\ \sin t, R\ \cos t)$
- usando la definizione di lavoro, si ha
$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell &= \int_0^{2\,\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -R\ \sin t \\ R\ \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -R\ \sin t \\ R\ \cos t \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\,\pi} R^2\,(\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\,\pi\,R\end{aligned}$$

Illustriamo graficamente il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$



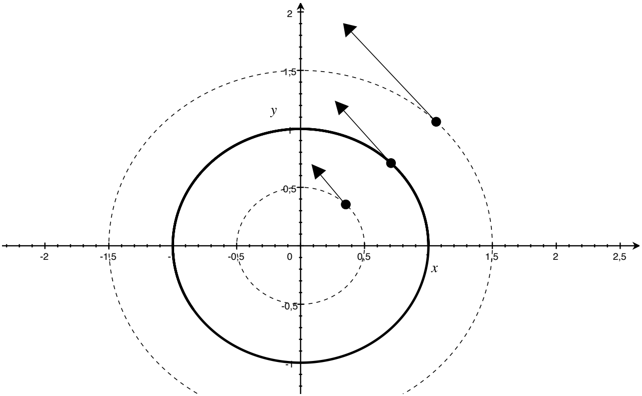


Figura: In ogni punto (x, y), risentiamo di una forza la cui direzione è ruotata di $\frac{\pi}{2}$ in senso anti-orario rispetto a quella del vettore posizione (si osservi che $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ è ortogonale a (x, y)). Inoltre, l'intensità di questa forza è $|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ovvero è *tanto più forte quanto più ci allontaniamo dall'origine*

Esercizio (Lavoro del campo gravitazionale)

Calcoliamo il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ *lungo un cammino qualsiasi che va da* $(1,1,1)$ *a* $(2,3,1)$, *senza passare dall'origine*

Soluzione

- A prima vista, questo esercizio dovrebbe perturbarci...
- ci hanno dato solo il punto iniziale $(1,1,1)$ ed il punto finale $(2,3,1)$, ma non il cammino!
- non manca qualcosa?
- proviamo ad impostare l'esercizio

- usando la definizione di lavoro, dobbiamo calcolare

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell = \int_a^b \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

  ma non sappiamo chi è γ...

- sappiamo solo che deve valere

$$\gamma(a) = (1,1,1) \qquad \text{e} \qquad \gamma(b) = (2,3,1)$$

  e γ non deve passare dall'origine

- ricordiamoci che $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ aveva una struttura particolare...
- ...ovvero si ha

$$\nabla U_{\mathrm{grav}}(x,y,z) = \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(x,y,z), \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

  con

$$U_{\mathrm{grav}}(x,y,z) = \frac{G\, m\, m_S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

- proviamo a scrivere di nuovo il lavoro, usando questa nuova informazione

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell = \int_a^b \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$
$$= \int_a^b \langle \nabla U_{\mathrm{grav}}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

- cosa ci abbiamo guadagnato? Ricordando la formula della "*Derivata curvilinea*" (vedi *Lezione 9*), si ha

$$\langle \nabla U_{\mathrm{grav}}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \frac{d}{dt} U_{\mathrm{grav}}(\gamma(t))$$

- quindi otteniamo

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell = \int_a^b \frac{d}{dt} U_{\mathrm{grav}}(\gamma(t)) \, dt$$

- in base al *Teorema fondamentale del Calcolo Integrale* (si veda ANALISI MATEMATICA A)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell &= \int_a^b \frac{d}{dt} U_{\mathrm{grav}}(\gamma(t))\, dt \\
&= \Big[U_{\mathrm{grav}}(\gamma(t)) \Big]_a^b \\
&= U_{\mathrm{grav}}(\gamma(b)) - U_{\mathrm{grav}}(\gamma(a)) \\
&= U_{\mathrm{grav}}(2,3,1) - U_{\mathrm{grav}}(1,1,1) \\
&= \frac{G\, m\, m_S}{\sqrt{14}} - \frac{G\, m\, m_S}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Commento finale

Siamo riusciti a calcolare il lavoro anche senza conoscere il cammino seguito!

Bastava conoscere solo il punto iniziale e quello finale!

Come mai? Cosa abbiamo usato? Qual è stato il punto chiave?

Osservate che questa proprietà non valeva per il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

...ci torneremo tra un attimo...

VIII.3 Campi vettoriali conservativi

Definizione

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale continuo

Si dice che F è **conservativo su** A se esiste $U : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$ tale che

$$\nabla U(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in A$$

La funzione U si chiama **potenziale di F**

Le componenti di un campo vettoriale conservativo hanno la forma

$$F_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

Osservazione

Si osservi che un potenziale, quando esiste, non è mai unico.
Infatti

$$\nabla U = \nabla(U + c), \qquad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}$$

Esempio

Il campo gravitazionale $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ è conservativo

Infatti, abbiamo visto che $\nabla U_{\mathrm{grav}} = \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$

Proposizione (Lavoro di un campo conservativo)

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale conservativo

Per ogni coppia di punti $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$, il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una qualsiasi curva regolare a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ tale che

$$\gamma(a) = \mathbf{x}_0, \qquad \gamma(b) = \mathbf{x}_1,$$

non dipende da γ

Più precisamente, se U è un potenziale di $\mathbf{F}$, allora

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell = U(\mathbf{x}_1) - U(\mathbf{x}_0)$$

Soluzione

- la dimostrazione è esattamente la stessa vista nell'Esercizio sul lavoro di $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$
- dalla definizione di campo conservativo abbiamo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla U(\mathbf{x})$$

  per un'opportuna funzione U
- abbiamo dunque

$$\langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla U(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

- per il *Teorema "Derivata curvilinea"* si ha

$$\langle \nabla U(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \frac{d}{dt} U(\gamma(t))$$

- in base alla definizione, il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\mathrm{Im}(\gamma)$ è quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{T}_\gamma(\mathbf{x})\rangle \, d\ell(\mathbf{x}) &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\gamma(t)) \, dt \\ &= \Big[U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) \Big] \\ &= U(\mathbf{x}_1) - U(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

- questo conclude la dimostrazione

Corollario

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ *un campo vettoriale conservativo*

Il lavoro di $\mathbf{F}$ *è nullo lungo il sostegno di ogni* *circuito* *regolare a tratti*

Dimostrazione

- Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ un circuito regolare a tratti
- dalla definizione di circuito, abbiamo in particolare che $\gamma(b) = \gamma(a)$
- dalla *Proposizione "Lavoro di un campo conservativo"* si ha quindi

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = 0$$

  dove U è un potenziale di $\mathbf{F}$

- la dimostrazione è conclusa

Esercizio

Si dimostri che il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x),$$

non è conservativo su $\mathbb{R}^2$

Soluzione

- Abbiamo visto in un esercizio precedente che il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il circuito regolare

  $$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

  è non nullo

- se $\mathbf{F}$ fosse conservativo su $\mathbb{R}^2$, avremmo una contraddizione col Corollario precedente

Dimostriamo che la proprietà espressa nella *Proposizione "Lavoro di un campo conservativo"* caratterizza completamente i campi vettoriali conservativi

Teorema LCC

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ *un campo vettoriale continuo, con* $A \subset \mathbb{R}^N$ *aperto connesso*

Allora le due proprietà seguenti sono equivalenti:

A *per ogni coppia di punti* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$*, il lavoro di* $\mathbf{F}$ *non dipende dalla curva* γ *che connette* $\mathbf{x}_0$ *a* $\mathbf{x}_1$

B $\mathbf{F}$ *è conservativo su* A

Dimostrazione

- Abbiamo già dimostrato nella *Proposizione "Lavoro di un campo conservativo"* che

$$B \Longrightarrow A$$

- Dobbiamo dimostrare che

$$A \Longrightarrow B$$

- ...ovvero che *se per ogni coppia di punti* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$*, il lavoro di* $\mathbf{F}$ *non dipende dalla curva* γ *che connette* $\mathbf{x}_0$ *a* $\mathbf{x}_1$, allora $\mathbf{F}$ è conservativo su A
- in base alla definizione, dobbiamo dimostrare che esiste un potenziale $U : A \to \mathbb{R}$ per il campo vettoriale $\mathbf{F}$
- dimostriamo il risultato nel caso $N = 2$
- dobbiamo quindi dimostrare che esiste una funzione di due variabili $U : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y)$$

- definiamo U: fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in A$ e poniamo

$$U(x_0, y_0) = 0$$

- preso $(x, y) \in A$ qualsiasi, dal momento che A è connesso, sappiamo che esiste una curva continua $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ che connette (x_0, y_0) a (x, y), senza mai uscire da A
- senza perdità di generalità, possiamo supporre che γ sia regolare a tratti
- definiamo quindi

$$U(x, y) = \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell$$

- U è ben definita, dal momento che il lavoro non dipende dalla particolare curva scelta γ, ma solo dal punto finale (x, y), grazie all'ipotesi su $\mathbf{F}$ (si ricordi che il punto iniziale (x_0, y_0) è fissato)
- dimostriamo che U così definita è un potenziale per $\mathbf{F}$
- fissiamo $(x, y) \in A$, dal momento che A è aperto sappiamo che esiste $r > 0$ tale che

$$B_r((x, y)) \subset A$$

- in particolare, questo implica che si ha $(x + h, y) \in A$, per ogni $|h| < r$

- prendiamo per semplicità $0 < h < r$ (il caso $-r < h < 0$ è del tutto analogo)
- per calcolare $U(x+h,y)$, introduciamo la nuova curva

$$\gamma_h(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in [0,1], \\ \\ (x+t-1,y) & \text{se } t \in [1,1+h], \end{cases}$$

  dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è una qualsiasi curva regolare a tratti che connette (x_0,y_0) a (x,y) **restando dentro** A
- il secondo pezzetto di curva che abbiamo incollato

$$t \mapsto (x+t-1,y), \qquad \text{per } t \in [1,1+h]$$

  ha come sostegno un segmento orizzontale che collega (x,y) con $(x+h,y)$
- facciamo un disegno

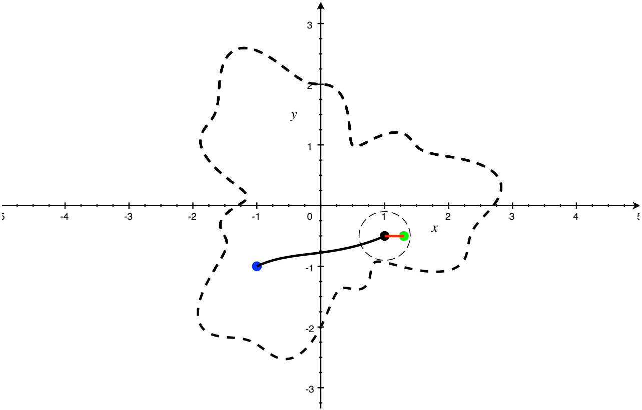


Figura: L'insieme aperto A, con il punto "base" (x_0, y_0) (in blu). In nero, un generico punto $(x, y) \in A$. I due punti sono connessi dal cammino γ. Preso il punto "spostato orizzontalmente" $(x + h, y)$ (in verde), lo connettiamo al punto nero tramite il segmento orizzontale (in rosso). Il cammino γ_h è definito incollando il cammino in nero con quello in rosso. In evidenza, anche una palla centrata in (x, y) e contenuta in A

- γ_h connette (x_0, y_0) al punto $(x+h, y)$, senza uscire da A
- abbiamo allora

$$U(x+h,y) = \int_{\mathrm{Im}(\gamma_h)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_{\gamma_h} \rangle \, d\ell.$$

- usando questa relazione e la definizione di integrale di linea

$$\begin{aligned}
&\frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_{\mathrm{Im}(\gamma_h)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_{\gamma_h} \rangle \, d\ell - \int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_{\gamma} \rangle \, d\ell \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_0^{1+h} \langle \mathbf{F}(\gamma_h(t)), \gamma_h'(t) \rangle \, dt - \int_0^1 \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \right]
\end{aligned}$$

- spezziamo il primo integrale come $\displaystyle\int_0^{1+h} = \int_0^1 + \int_1^{1+h} \ldots$

- ...ed usiamo che γ_h coincide con γ su $[0,1]$
- ovvero abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h}\\
&=\frac{1}{h}\left[\int_0^{1+h}\langle \mathbf{F}(\gamma_h(t)),\gamma_h'(t)\rangle\,dt-\int_0^1\langle \mathbf{F}(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt\right]\\
&=\frac{1}{h}\left[\cancel{\int_0^1\langle \mathbf{F}(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt}+\int_1^{1+h}\langle \mathbf{F}(\gamma_h(t)),\gamma_h'(t)\rangle\,dt\right]\\
&-\frac{1}{h}\cancel{\int_0^1\langle \mathbf{F}(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt}\\
&=\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\langle \mathbf{F}(\gamma_h(t)),\gamma_h'(t)\rangle\,dt
\end{aligned}
$$

- fin'ora, abbiamo ottenuto che

$$\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_1^{1+h} \langle \mathbf{F}(\gamma_h(t)), \gamma_h'(t)\rangle\, dt$$

- vogliamo dimostrare che esiste il limite per $h \to 0^+$ e che questo limite coincide con

$$F_1(x,y)$$

- se facciamo ciò, abbiamo dimostrato che U ammette derivata parziale in x e che vale

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y)$$

- per l'altra derivata parziale, la dimostrazione sarebbe del tutto simile e la omettiamo

- per dimostrare che esiste

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \langle \mathbf{F}(\gamma_h(t)), \gamma_h'(t)\rangle \, dt$$

innanzitutto ricordiamoci che per costruzione

$$\gamma_h(t) = (x+t-1, y) \qquad \text{per } t \in [1, 1+h],$$

e quindi

$$\gamma_h'(t) = (1, 0) \qquad \text{per } t \in [1, 1+h]$$

- quello che vogliamo quindi, è mostrare che esiste

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \langle \mathbf{F}(x+t-1, y), (1,0)\rangle \, dt$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} F_1(x+t-1, y) \, dt$$

- usando *Media integrale* (si veda "*Calcolo integrale per funzioni di una variabile*", nel Capitolo 6 di ANALISI MATEMATICA A)

  per la funzione continua $t \mapsto F_1(x + t - 1, y)$
- ...abbiamo che esiste $t_h \in [1, 1 + h]$ tale che

$$\frac{1}{h} \int_1^{1+h} F_1(x + t - 1, y)\, dt = F_1(x + t_h - 1, y)$$

- da cui quindi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} F_1(x + t - 1, y)\, dt = \lim_{h \to 0^+} F_1(x + t_h - 1, y) = F_1(x, y)$$

grazie alla **continuità** di F_1

- Questo dimostra che

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} = F_1(x,y),$$

e quindi U è derivabile in x e vale

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$$

- come spiegato prima, questo termina la dimostrazione

VIII.4 Rotore e divergenza

Definizione

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$

Si definisce **divergenza di F** la funzione definita su A come "la traccia della matrice Jacobiana di $\mathbf{F}$"

ovvero

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial F_N}{\partial x_N}(\mathbf{x})$$

Definizione

Sia $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$

Si dice che $\mathbf{F}$ è **solenoidale su** A se vale

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in A$$

Esercizio

Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali sono solenoidali sul loro insieme di definizione

$$\mathbf{F}(x,y) = (-y,x), \qquad \mathbf{G}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (x,y,z)$$

Soluzione

- Il campo $\mathbf{F}$ è definito su $\mathbb{R}^2$ ed è di classe C^1 sul suo dominio
- la sua divergenza è data da

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)$$

- dal momento che $F_1(x, y) = -y$ non dipende da x, si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) = 0$$

- analogamente $F_2(x, y) = x$ non dipende da y, quindi si ha

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y) = 0$$

- quindi $\mathbf{F}$ è solenoidale su $\mathbb{R}^2$

- il campo $\mathbf{G}$ è definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed è ivi di classe C^1
- la sua divergenza è data da

$$\operatorname{div} \mathbf{G}(x,y) = \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y)$$

- calcoliamo le due derivate parziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} &= \frac{(x^2+y^2) - x \cdot (2\,x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

- in modo simile si ha

$$\frac{\partial G_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2) - y\cdot(2\,y)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

- la sua divergenza è data quindi da

$$\operatorname{div}\mathbf{G}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

- **G** è solenoidale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- infine, il campo **H** è definito su $\mathbb{R}^3$ ed ivi di classe C^1
- si vede facilmente che

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{\partial H_2}{\partial y} = \frac{\partial H_3}{\partial z} = 1$$

- da cui si ottiene

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 3$$

- quindi **H non è** solenoidale

Esercizio per casa

Si dimostri che il campo gravitazionale

$$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(x,y,z) = -\frac{G\,m\,m_S}{x^2+y^2+z^2} \times \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

è solenoidale su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

Esercizio per casa (Compito del 17/07/2019)

Si dica quali tra i seguenti potenziali generano un campo vettoriale solenoidale sul loro dominio di definizione

$$U(x,y) = \arctan\frac{x}{y}, \qquad V(x,y) = x^2 - y^2$$

$$W(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad T(x,y) = x^2 + y^2$$

Definizione: rotore per $N = 3$

Sia campo vettoriale $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^1(A)$

Si definisce **rotore di F** il nuovo campo vettoriale

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^3$$

le cui componenti si calcolano facendo formalmente il prodotto vettoriale $\nabla \times \mathbf{F}$

In altre parole

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Definizione: rotore per $N = 2$

Nel caso di un campo vettoriale in dimensione 2, ovvero
$\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^2$ con $A \subset \mathbb{R}^2$

il rotore si definisce usando la definizione precedente per il campo "esteso"

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0).$$

Osservando che la <u>terza componente è nulla</u> e che il campo <u>non dipende da z</u>, si ottiene dunque

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$