Analisi Matematica B
– *Lezione 23* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

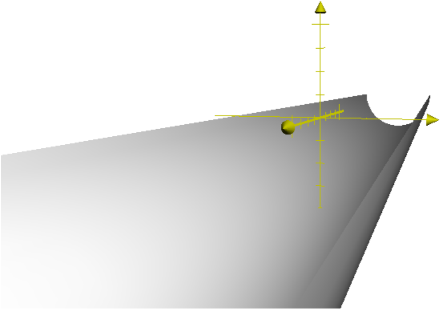
Ferrara, 26 Maggio 2020

VIII.6 Flusso di un campo vettoriale

Caso semplice

Immaginiamo di avere una tubatura all'interno della quale scorre dell'acqua

Per semplicità, supponiamo di centrare questa tubatura lungo l'asse delle x



Supponiamo per il momento che l'acqua scorra in modo uniforme nel tempo e nello spazio, in direzione dell'asse della tubatura

Possiamo modellizzare questo moto dell'acqua tramite un campo vettoriale costante

$$\mathbf{F}(x, y, z) = m\,\mathbf{i}$$

dove m è la quantità di acqua

In altre parole, in ogni punto (x, z, y) della tubatura, il campo $\mathbf{F}$ ci dice che sta passando una quantità d'acqua m, con direzione $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$

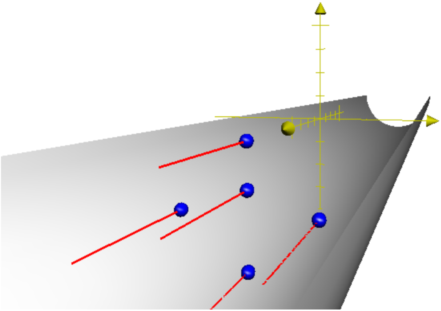


Figura: Alcuni punti della tubatura (punti blu), con il campo **F** (linee rosse) rappresentante il moto dell'acqua

Consideriamo una superficie Σ ortogonale al tubo, vogliamo definire il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ come

$$\text{massa} \times \text{area} = m \cdot \mathrm{Area}(\Sigma)$$

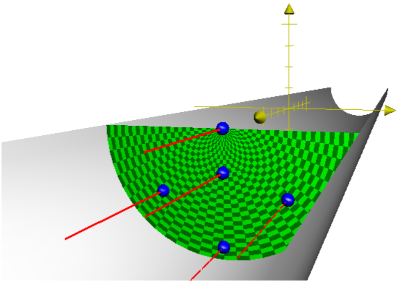


Figura: Una sezione ortogonale alla direzione del tubo

Caso intermedio

Supponiamo adesso che l'acqua scorra in modo uniforme nel tempo, ma non nello spazio, avendo direzione di moto variabile da punto a punto della tubatura

Possiamo modellizzare questo moto dell'acqua tramite un campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

che ci dice che nel punto (x, y, z) passa

- una quantità di acqua pari a $|\mathbf{F}(x, y, z)|$
- in direzione

$$\frac{\mathbf{F}(x, y, z)}{|\mathbf{F}(x, y, z)|}$$

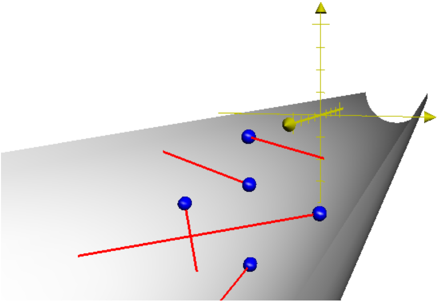


Figura: Alcuni punti della tubatura (punti blu), con il campo **F** (linee rosse) rappresentante il moto dell'acqua, stavolta NON costante

Consideriamo una superficie Σ ortogonale al tubo, vogliamo definire il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso questa superficie

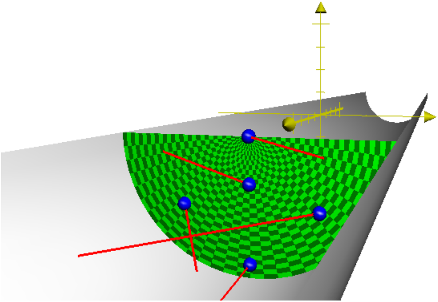


Figura: Una sezione ortogonale alla direzione del tubo

Nel calcolare il flusso, in ogni punto ci interessa tenere conto **soltanto** della quantità di acqua che attraversa la sezione Σ

Dal momento che la sezione è ortogonale a $\mathbf{i}$, la quantità di acqua che attraversa la sezione nel punto (x, y, z) è data da

$$F_1(x, y, z)$$

che possiamo anche scrivere come

$$\langle \mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{i} \rangle$$

ed osserviamo che $\mathbf{i}$ è il versore normale alla sezione

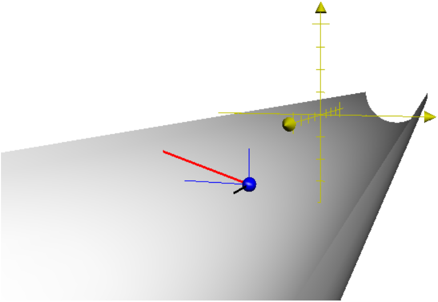


Figura: In blu, un punto (x, y, z) della sezione Σ. La freccia rossa indica il campo $\mathbf{F}$ in questo punto. Decomponiamo $\mathbf{F}$ lungo le sue tre componenti: la componente nera, lungo l'asse x, è quella che misura l'acqua che attraversa la sezione. Le altre due componenti "giacciono" nel piano $y\,z$ e rappresentano la quantità di acqua che si muove tangenzialmente a Σ

Adesso, dal momento che **F** non è costante, la quantità di acqua passante da Σ varia da punto a punto

Per definire il flusso, dobbiamo quindi, immaginare di:

- scomporre Σ in quadratini infinitesimali in corrispondenza di ogni suo punto
- calcolare il flusso attraverso ogni quadratino con la regola "massa $\times$ area"
- sommare tutti i quadratini

Quindi la quantità di acqua che attraversa la sezione in corrispondenza di (x, y, z) è

$$\text{massa} \times \text{area} = F_1(x, y, z)\, dy\, dz$$

dove $dy\, dz$ rappresenta l'area di un quadratino infinitesimale centrato in (x, y, z)

Sommando tutti questi contributi al variare di $(x, y, z) \in \Sigma$, si ottiene il flusso totale, che sarà

$$\iint_{\Sigma} F_1(x, y, z)\, dy\, dz$$

che possiamo anche riscrivere come

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{i} \rangle\, dy\, dz$$

Si ricordi che **i** <u>è ortogonale a</u> Σ

Quest'ultima osservazione ci è utile per comprendere il caso generale, in cui Σ non è necessariamente "dritta"....

Definizione

Sia $\phi : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare

Sia $\mathbf{F} : E \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, con $E \subset \mathbb{R}^3$ aperto tale che

$$\mathrm{Im}(\phi) \subset E$$

Si definisce **flusso di F attraverso il sostegno di** ϕ come il seguente integrale di superficie

$$\Phi_{\mathbf{F}|_{\mathrm{Im}(\phi)}} = \iint_{\mathrm{Im}(\phi)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\phi \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$

Osservazione

Ricordando le definizioni di:

- integrale di superficie (vedi *Lezione 20*), in particolare

$$\boxed{d\sigma(x,y,z) = \left|\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s}\right| \, dt\, ds}$$

- versore normale al sostegno di una superficie regolare (vedi *Lezione 14*)

$$\mathbf{N}_\phi = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s}}{\left|\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s}\right|}$$

abbiamo che il flusso di un campo vettoriale può essere riscritto come....

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{F}|_{\mathrm{Im}(\phi)}} &= \iint_{\mathrm{Im}(\phi)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\phi \rangle \, d\sigma(x,y,z) \\
&= \iint_{\overline{A}} \left\langle \mathbf{F}(\phi(t,s)), \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s}}{\left| \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s} \right|} \right\rangle \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right| \, dt \, ds
\end{aligned}
$$

ovvero, semplificando l'elemento d'area $\left| \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s} \right|$, si ottiene

$$
\boxed{\Phi_{\mathbf{F}|_{\mathrm{Im}(\phi)}} = \iint_{\overline{A}} \left\langle \mathbf{F}(\phi(t,s)), \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle \, dt \, ds}
$$

Esercizio

Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ *attraverso la calotta sferica*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0\right\}$$

Soluzione

- Cechiamo intanto di scrivere Σ come il sostegno di una opportuna superficie regolare
- trattandosi di un pezzo di sfera, possiamo usare

$$\phi(t, s) = (\cos t \ \sin s, \sin t \ \sin s, \cos s)$$

- attenzione però a dove si prendono i parametri (t, s): vogliamo che $\mathrm{Im}(\phi) = \Sigma$ e non tutta la sfera

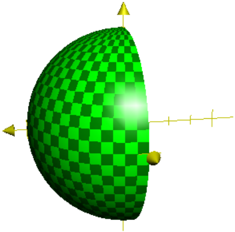


Figura: L'insieme Σ attraverso cui calcoliamo il flusso di $\mathbf{F}$

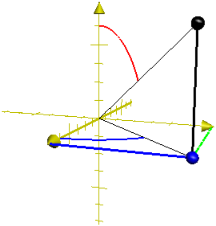


Figura: Ricordandoci il ruolo degli angoli t (angolo blu) e s (angolo rosso), se vogliamo descrivere la mezza sfera disegnata prima, si dovrà prendere $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $s \in [0, \pi]$

- quindi Σ coincide con il sostegno della superficie regolare

$$\phi(t,s) = (\cos t \, \sin s, \sin t \, \sin s, \cos s)$$

dove

$$(t,s) \in \overline{A} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]$$

- ricordiamo anche che (si veda *Lezione 13*)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} = \Big(-\cos t \, \sin^2 s, -\sin t \, \sin^2 s, -\cos s \, \sin s \Big)$$

- inoltre, dal momento che $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,0,0)$, si avrà

$$\mathbf{F}(\phi(t,s)) = (\phi_1(t,s), 0, 0) = (\cos t \, \sin s, 0, 0)$$

- in base alla definizione di flusso e all'osservazione che avevamo fatto...
- ...dobbiamo calcolare

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\phi \rangle \, d\sigma(x, y, z) \\
&= \iint_{\overline{A}} \left\langle \mathbf{F}(\phi(t, s)), \frac{\partial \phi}{\partial t} \times \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\rangle dt \, ds \\
&= \iint_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]} \left\langle \begin{bmatrix} \cos t \, \sin s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos t \, \sin^2 s \\ -\sin t \, \sin^2 s \\ -\cos s \, \sin s \end{bmatrix} \right\rangle dtds \\
&= -\iint_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]} \cos^2 t \, \sin^3 s \, dt \, ds
\end{aligned}
$$

- ovvero

$$\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\phi \rangle \, d\sigma(x,y,z) = -\iint_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]} \cos^2 t \, \sin^3 s \, dt \, ds$$
$$= -\int_0^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \right) \sin^3 s \, ds$$
$$= -\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \right) \left(\int_0^{\pi} \sin^3 s \, ds \right)$$

- i due integrali che ci restano da calcolare, li abbiamo ormai già visti tante volte
- il primo si può fare con la formula di bisezione

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\,t)}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\,t)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

- il secondo si fa scrivendo

$$\sin^3 s = \sin s\,(1-\cos^2 s) = \frac{d}{ds}\left(-\cos s + \frac{\cos^3 s}{3}\right)$$

- quindi

$$\int_0^{\pi} \sin^3 s\, ds = \left[-\cos s + \frac{\cos^3 s}{3}\right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

- in conclusione, il valore del flusso è dato da

$$\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\phi \rangle\, d\sigma(x,y,z) = -\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^3 s\, ds\right) = -\frac{2}{3}\,\pi$$

Esercizio per casa

Si calcoli il flusso del campo di Biot-Savart

$$\mathbf{F}_{BS}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

attraverso

$$\Sigma_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y = 1, \, -1 \leq x \leq 1, \, -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

e attraverso

$$\Sigma_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 1, \, -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

Abbiamo visto la definizione di flusso di un campo vettoriale $\mathbf{F}$ attraverso il sostegno di una superficie regolare

Quando tale sostegno “racchiude” al suo interno una regione di spazio limitata, abbiamo a disposizione uno dei risultati più importanti di tutto il corso che ci permette di trasformare l'integrale di superficie

$$\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_\phi \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$

(che talvolta può essere scomodo da calcolare) in un integrale di volume

Si tratta del...

Teorema della divergenza

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ *un insieme aperto e limitato, la cui frontiera* ∂E *coincida con il sostegno di una superficie regolare oppure con l'unione di un numero finito di sostegni di superfici regolari*

Sia $\mathbf{F} : \overline{E} \to \mathbb{R}^3$ *un campo vettoriale di classe* $C^1(\overline{E})$

Allora per il flusso di $\mathbf{F}$ *attraverso* ∂E *vale l'identità seguente*

$$\boxed{\iint_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz}$$

dove **ATTENZIONE** *il versore* $\mathbf{N}_{\partial E}$ *è il versore normale alla frontiera* ∂E*, orientato in modo uscente rispetto all'insieme* E

Osservazione

Questo risultato permette di trasformare un integrale di superficie in un integrale triplo....ma lo si può usare anche al contrario

Prima di vedere la dimostrazione, occupiamoci di

Un errore tipico

L'errore più tipico che molti di voi commetteranno è di non prestare attenzione al fatto che il *Teorema della divergenza* permette di calcolare il flusso di **F** attraverso

la frontiera di un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$

—

Mettiamo a confronto due situazioni: solo in una delle due potremo usare il *Teorema della divergenza*

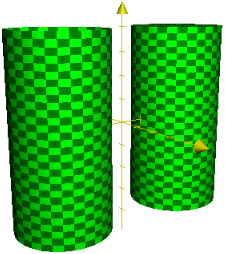


Figura: Due superfici cilindriche apparentemente uguali

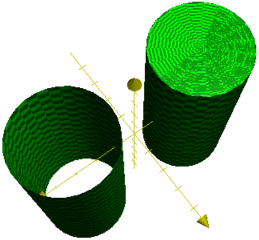


Figura: Ma visti da sopra...

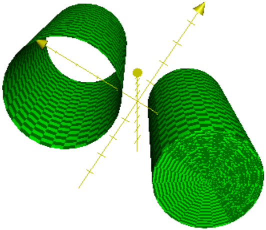
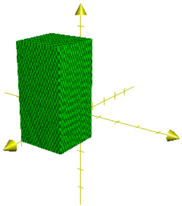


Figura: ....e visti da sotto, si scopre che quello di sinistra consiste del solo involucro laterale, mentre quello di destra contiene anche i due “tappi”. Quindi quello di sinistra **non è** la frontiera di un aperto limitato di $\mathbb{R}^3$ e per calcolare il flusso di un campo **F** attraverso di esso **NON** si può usare il *Teorema della divergenza*. Su quello “tappato” invece, possiamo usare il Teorema della divergenza

Dimostrazione (*Teorema della divergenza*)

- Facciamo la dimostrazione soltanto in un caso particolare, giusto per dare l'idea del perché il risultato è vero
- prendiamo come E un parallelepipedo, con facce parallele ai piani coordinati
- ovvero prendiamo

$$E = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$$



- il flusso di $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ attraverso la frontiera ∂E del parallelepipedo si può decomporre come la somma dei flussi attraverso le singole facce
- abbiamo quindi 6 contributi, che possiamo considerare a coppie:
  - le due facce ortogonali all'asse delle x
  - le due facce ortogonali all'asse delle y
  - le due facce ortogonali all'asse delle z

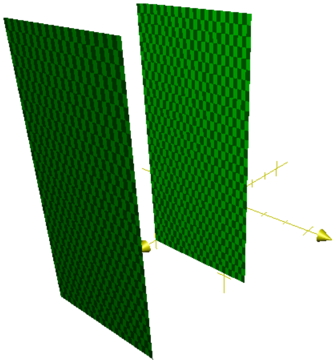


Figura: Il pezzo di frontiera ∂E corrispondente alla due facce ortogonali all'asse delle x, ovvero gli insiemi $\{a_1\} \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ (faccia "posteriore") e $\{b_1\} \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ (faccia "anteriore")

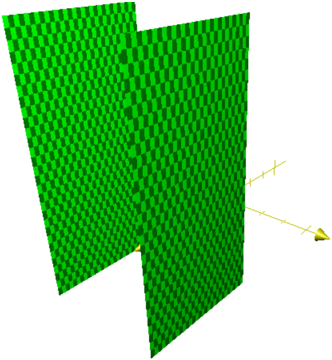


Figura: Il pezzo di frontiera ∂E corrispondente alla due facce ortogonali all'asse delle y, ovvero gli insiemi $(a_1, b_1) \times \{a_2\} \times (a_3, b_3)$ (faccia "posteriore") e $(a_1, b_2) \times \{b_2\} \times (a_3, b_3)$ (faccia "anteriore")

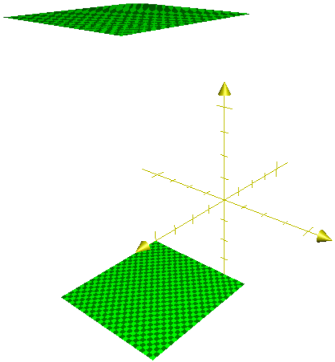
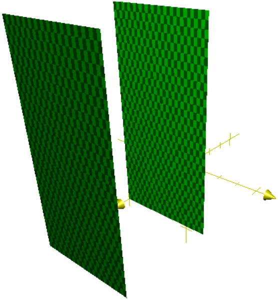


Figura: Il pezzo di frontiera ∂E corrispondente alla due facce ortogonali all'asse delle z, ovvero gli insiemi $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \{a_3\}$ (faccia "inferiore") e $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \{b_3\}$ (faccia "superiore")

- partiamo dal flusso di $\mathbf{F}$ attraverso la coppia di facce di E ortogonali all'asse delle x
- questo flusso è quindi dato da

$$\iint_{E_x^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) + \iint_{E_x^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z)$$

dove E_x^+ è la faccia che sta "davanti", E_x^- quella che sta "dietro"



- osserviamo subito che la normale uscente $\mathbf{N}_{\partial E}$ ha una forma molto semplice
- ha esattamente la direzione dell'asse delle x
- più precisamente è

$$\mathbf{N}_{\partial E} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) \qquad \text{su } E_x^+$$

e

$$\mathbf{N}_{\partial E} = -\mathbf{e}_1 = (-1, 0, 0) \qquad \text{su } E_x^-$$

- il segno "$-$" sulla faccia "dietro" viene dal fatto che il versore deve essere uscente

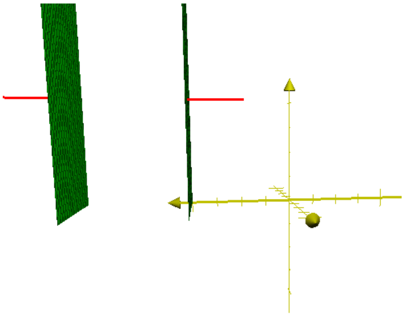


Figura: Le due facce E_x^+ e E_x^- viste di profilo, con i rispettivi versori normali uscenti (in rosso)

- il contributo al flusso di queste due facce si scrive quindi come

$$\iint_{E_x^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) + \iint_{E_x^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z)$$
$$= \iint_{E_x^+} F_1 \, d\sigma(x,y,z) - \iint_{E_x^-} F_1 \, d\sigma(x,y,z)$$

dal momento che

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{e}_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = F_1$$

- ora osserviamo che E_x^+ coincide con il sostegno della superficie regolare

$$\phi_+(t,s) = (b_1, t, s), \qquad \text{con } (t,s) \in [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

dal momento che E_x^+ è un rettangolo, situato in corrispondenza di $x = b_1$

- per questa superficie, si ha

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial t} = (0,1,0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi_+}{\partial s} = (0,0,1)$$

da cui ovviamente l'elemento di area è

$$\left| \frac{\partial \phi_+}{\partial t} \times \frac{\partial \phi_+}{\partial s} \right| dt\, ds = |(1,0,0)|\, dt\, ds = dt\, ds$$

- quindi per quanto riguarda l'integrale

$$\iint_{E_x^+} F_1\, d\sigma(x,y,z)$$

esso diventa

$$\iint_{E_x^+} F_1\, d\sigma(x,y,z) = \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} F_1(b_1,t,s)\, dt\, ds$$

- in modo del tutto analogo, osservando che E_x^- coincide con il sostegno della superficie regolare

$$\phi_-(t,s) = (a_1, t, s), \qquad \text{con } (t,s) \in [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

si ha

$$\iint_{E_x^-} F_1 \, d\sigma(x,y,z) = \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} F_1(a_1, t, s) \, dt \, ds$$

- ricapitolando, il contributo al flusso di queste due facce è

$$
\begin{aligned}
&\iint_{E_x^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) + \iint_{E_x^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E}\rangle \, d\sigma(x,y,z) \\
&\quad = \iint_{E_x^+} F_1 \, d\sigma(x,y,z) - \iint_{E_x^-} F_1 \, d\sigma(x,y,z) \\
&\quad = \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} F_1(b_1,t,s)\, dt\, ds \\
&\quad - \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} F_1(a_1,t,s)\, dt\, ds \\
&\quad = \iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} \Big[F_1(b_1,t,s) - F_1(a_1,t,s) \Big]\, dt\, ds
\end{aligned}
$$

- per dimostrare il *Teorema della divergenza*, dovremmo far saltare fuori un integrale triplo ed una divergenza....come si fa?

- osserviamo che dal *Teorema fondamentale del calcolo*

$$F_1(b_1, t, s) - F_1(a_1, t, s) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, t, s)\, dx$$

- quindi il contributo al flusso delle due facce ortogonali all'asse x in conclusione è

$$\begin{aligned}
&\iint_{E_x^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x, y, z) + \iint_{E_x^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x, y, z) \\
&\qquad = \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} \Big[F_1(b_1, t, s) - F_1(a_1, t, s) \Big] \, dt\, ds \\
&\qquad = \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, t, s)\, dx \right) \, dt\, ds \\
&\qquad = \iiint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, t, s)\, dx\, dt\, ds
\end{aligned}$$

- ovvero, ricordando che $E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ e rinominando le due variabili t, s come y, z, abbiamo ottenuto

$$\iint_{E_x^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) + \iint_{E_x^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z)$$
$$= \iiint_E \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

- stiamo andando nella direzione giusta?
- abbiamo scritto un pezzo del flusso come un integrale triplo di un pezzo di divergenza! Ricordate infatti che

$$\mathrm{div}\, \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- ragionando in modo del tutto analogo, si dimostra (*per esercizio!*) che il contributo al flusso delle due facce ortogonali all'asse y è

$$\iint_{E_y^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) + \iint_{E_y^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) \\ = \iiint_E \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

- ...ed il contributo al flusso delle due facce ortogonali all'asse z è

$$\iint_{E_z^+} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) + \iint_{E_z^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) \\ = \iiint_E \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

- sommando tutte le 3 coppie di contributi, si trova quindi che il flusso è dato da

$$\begin{aligned}\iint_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma(x,y,z) &= \iiint_E \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ &+ \iiint_E \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ &+ \iiint_E \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz\end{aligned}$$

- ...et voilà!

Corollario

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e limitato, che soddisfi le ipotesi del Teorema della divergenza

Sia $\mathbf{F} : \overline{E} \to \mathbb{R}^3$ *un campo vettoriale di classe* $C^1(\overline{E})$ **solenoidale**

Allora il flusso di $\mathbf{F}$ *attraverso* ∂E *è nullo*

Dimostrazione

- Il flusso è dato da $\displaystyle\iint_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial E} \rangle \, d\sigma$
- dal *Teorema della divergenza* questo è uguale a $\displaystyle\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$
- dal momento che $\mathbf{F}$ è solenoidale (vedi *Lezione 21*), si ha $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ identicamente

Esercizio

Si calcoli il flusso del campo gravitazionale $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ *attraverso la sfera* Σ *di centro* $(5, 6, -1)$ *e raggio* 2

Soluzione

- Ricordiamo che $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ ha la forma (in notazione vettoriale compatta)

$$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}(\mathbf{x}) = -\frac{G\, m\, m_S}{|\mathbf{x}|^2}\,\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \qquad \text{per } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

- se proviamo a calcolare il flusso usando la definizione, ovvero

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$

la cosa sembra piuttosto laboriosa (la difficoltà più grossa è legata al fatto che Σ non è centrata nell'origine)

- possiamo però osservare che Σ è la frontiera della palla $B_2((5,6,-1))$
- inoltre $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ è C^1 su tutta questa palla (il punto pericoloso $(0,0,0)$ sta fuori da questa palla, *verificatelo!*)
- ...in più $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ è solenoidale su questa palla (vedi esercizio per casa *Lezione 21*)
- per il Corollario precedente allora

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iint_{\partial B_2((5,6,-1))} \langle \mathbf{F}_{\mathrm{grav}}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = 0$$

Esercizio per casa

Si calcoli il flusso del campo gravitazionale $\mathbf{F}_{\mathrm{grav}}$ *attraverso la sfera* Σ *di centro* $(0,0,0)$ *e raggio* 2

Avvertenza

Occhio ai tranelli: se volete usare un teorema, controllate sempre che le ipotesi siano soddisfatte...

Esercizio per casa

Si calcoli il flusso del campo vettoriale costante $\mathbf{F}(x,y,z) = (1,0,2)$ *attraverso il sostegno della superficie "ciambella" (vedi Lezione 14)*

Esercizio (Compito del 17/02/2020)

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z\,(x^2 + y^2))$$

e se ne calcoli il flusso attraverso la frontiera dell'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$$

Soluzione

- Si osservi che $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^3$
- l'insieme E è una corona sferica, ovvero la porzione di spazio compresa tra la sfera di raggio 2 e centro l'origine, e la sfera di raggio 1 e centro l'origine

- in particolare, la frontiera ∂E è unione dei sostegni di due superfici regolari
- siamo quindi in condizione di poter applicare il *Teorema della divergenza*
- abbiamo allora che il flusso uscente è dato da

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{F}|_{\partial E}} &= \iint_{\partial E} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega} \rangle \, d\sigma(x,y,z) \\ &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx\, dy\, dz\end{aligned}$$

- osserviamo che la divergenza prende una forma piuttosto semplice

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial z}(z\,(x^2+y^2)) = x^2 + y^2$$

- ci siamo quindi ridotti a calcolare l'integrale triplo seguente

$$\iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

- la funzione da integrare ha simmetria cilindrica (dipende solo dalla distanza dall'asse x, ovvero $\sqrt{x^2 + y^2}$), l'insieme di integrazione invece ha simmetria sferica...
- ci conviene forse usare un cambio di variabili...ma cilindriche o sferiche?
- stavolta conviene dare la precedenza all'insieme di intregrazione e fare il cambio (*coordinate sferiche*)

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= \varrho \cos\varphi \end{aligned}$$

- in queste coordinate, l'insieme E si descrive in modo molto elementare, prendendo

$$\varrho \in [1,2], \qquad \vartheta \in [0,2\,\pi], \qquad \varphi \in [0,\pi]$$

- ovvero, il nuovo insieme di integrazione diventa

$$\Omega = [1,2] \times [0,2\,\pi] \times [0,\pi]$$

- abbiamo quindi dalla formula del cambio di variabili negli integrali tripli

$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_\Omega (\varrho^2\,\cos^2\vartheta\,\sin^2\varphi + \varrho^2\,\sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi)\,\varrho^2\,\sin\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi$$

- usando che $\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta=1$, si ha

$$
\begin{aligned}
\iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \iiint_\Omega \varrho^4\,\sin^3\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi\\
&= \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \left(\int_1^2 \varrho^4\,d\varrho\right)\,\sin^3\varphi\,d\vartheta\,d\varphi\\
&= \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_1^2\,\sin^3\varphi\,d\vartheta\,d\varphi\\
&= \frac{31}{5}\,\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \sin^3\varphi\,d\vartheta\,d\varphi\\
&= \frac{62\,\pi}{5}\,\int_0^\pi \sin^3\varphi\,d\varphi
\end{aligned}
$$

- l'ultimo integrale l'abbiamo già calcolato ad inizio lezione
- si ha

$$\sin^3\varphi = \sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi) = \frac{d}{d\varphi}\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)$$

- quindi

$$\int_0^\pi \sin^3\varphi\,d\varphi = \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

- in conclusione, il flusso vale

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{62\,\pi}{5}\,\frac{4}{3} = \frac{248\,\pi}{15}$$

Esercizio

Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$$

attraverso

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1/2 \leq z \leq 1/2\right\}$$

Soluzione

- Facciamo innanzitutto un disegno di Σ
- si tratta del sottoinsieme della sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1, ottenuto tagliando "sopra" $z = 1/2$ e "sotto" $z = -1/2$

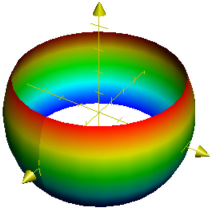


Figura: L'insieme Σ: si tratta di una sfera "scalottata"

- ci sono due modi di fare questo esercizio

  1. usando direttamente la definizione di flusso ed andandosi a calcolare l'integrale di superficie

     $$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$

     con la normale $\mathbf{N}$ che può essere presa uscente o entrante dalla sfera, a seconda dei gusti

  2. usando un trucco, in modo che sia possibile applicare il *Teorema della divergenza*

- per casa, seguite la strada 1.
- in cambio, io vi mostro il trucco 2.

- “*Prof! Non ho capito perché parla di trucchi....non si può usare il Teorema della divergenza e via?!*”
- ricordatevi quello che vi ho detto prima “se volete usare un teorema, controllate sempre che le ipotesi siano soddisfatte...”
- per l’insieme Σ, qualcuno riesce a vedere perché non posso usare il *Teorema della divergenza*?
- rivediamo il disegno

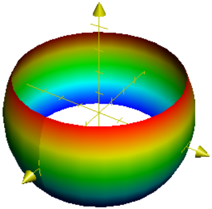


Figura: L'insieme Σ, di nuovo lui: è della forma ∂E, per qualche $E \subset \mathbb{R}^3$ aperto limitato?

- ovviamente NO, l'insieme Σ non racchiude una porzione di spazio tridimensionale, "entra aria" da sopra e da sotto
- quindi **non** possiamo usare il *Teorema della divergenza* e trasformare

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z)$$

in un integrale triplo...