Analisi Matematica B
– *Lezione 6* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 18 Marzo 2020

II.3 Cenni di topologia

Notazioni

- Introduciamo la **palla aperta di centro $\mathbf{x}_0$ e raggio** R

$$B_R(\mathbf{x}_0) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \ : \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R\right\}$$

  Essa è composta da tutti i punti che si trovano ad una distanza dal centro $\mathbf{x}_0$ *strettamente minore* di R

- introduciamo anche la **palla aperta forata di centro $\mathbf{x}_0$ e raggio** R

$$\overset{*}{B}_R(\mathbf{x}_0) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \ : \ 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R\right\}$$

  Essa coincide con $B_R(\mathbf{x}_0)$ a cui viene rimosso il centro $\mathbf{x}_0$

Osservazione

Queste due sono le generalizzazioni $N-$dimensionali delle nozioni di **intorno** e **intorno forato** viste ad Analisi Matematica A

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, si dice che A è **aperto** se vale la proprietà seguente:

$$\forall \mathbf{x} \in A, \quad \exists R > 0 \quad \text{tale che} \quad B_R(\mathbf{x}_0) \subset A$$

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, si dice che A è **chiuso** se il suo complementare

$$\mathbb{R}^N \setminus A$$

è aperto

Osservazione

In base a queste definizioni

$$\mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad \text{l'insieme vuoto } \emptyset,$$

sono insiemi sia aperti che chiusi

Esercizio

Si considerino gli insiemi

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\right\} \qquad F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < 0\right\}$$

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\right\} \qquad H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq 0\right\}$$

Si dimostri che E ed F sono aperti, mentre G e H sono chiusi.

Soluzione

- Dimostriamo intanto che E è aperto
- in base alla definizione, dobbiamo dimostrare che per ogni $(x, y) \in E$, esiste una palla centrata in (x, y) che resta tutta contenuta dentro E

Facciamo intanto un disegno, per capire la situazione

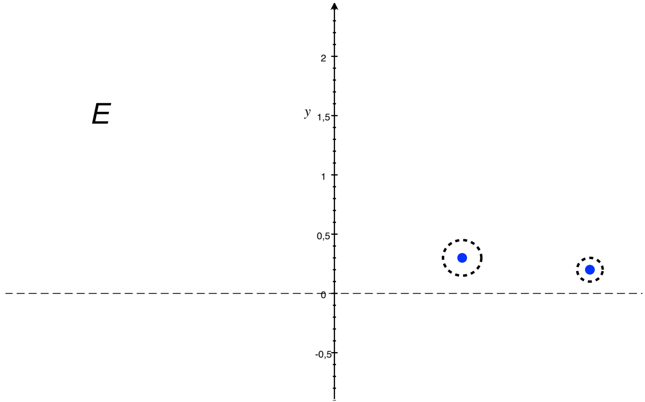


Figura: L'insieme E è la metà superiore del piano cartesiano, con l'asse delle x escluso. In blu, due punti generici appartenenti a E. Tratteggiate, due palle centrate in questi punti e contenute tutte dentro E.

- il disegno precedente ci suggerisce che dato $(x, y) \in E$, ci basta prendere la palla ivi centrata ed avente raggio uguale alla metà della distanza di tale punto dal "bordo", corrispondente all'asse x
- in altre parole, se fissiamo

$$R = \frac{y}{2}$$

  allora per costruzione $B_R((x, y)) \subset E$ (*verificatelo!*)
- osservate che la scelta di R è ammissibile, perché $y > 0$ per definizione di E
- *per esercizio* dimostrare che F è anch'esso aperto

- ci resta da provare che

$$G = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\Big\} \qquad H = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq 0\Big\}$$

  sono chiusi

- basta osservare che

$$G = \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < 0\Big\} = \mathbb{R}^2 \setminus F$$

  ed F è aperto

- per definizione di insieme chiuso, si ottiene che G è chiuso
- per H, basta osservare che $H = \mathbb{R}^2 \setminus E$

Esercizio

Si provi che l'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \right\}$$

non è ne' aperto ne' chiuso

Soluzione

- Cerchiamo di visualizzare l'insieme A
- si tratta dell'insieme dei punti del piano che hanno distanza da $(0,0)$ almeno 1 e al massimo 2
- si tratta quindi di una **corona circolare**
- **attenzione** ai segni delle disuguaglianze: i punti che hanno distanza esattamente 2 stanno in A; i punti che hanno distanza esattamente 1 sono esclusi (perché $1 < \sqrt{x^2 + y^2}$)

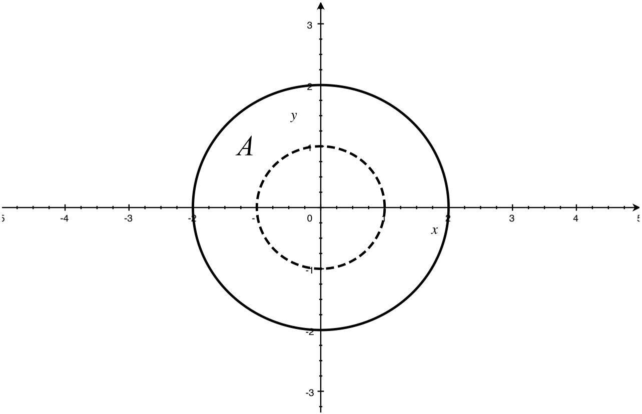


Figura: La corona circolare A. Il cerchio più esterno, in tratto continuo, fa parte dell'insieme A; mentre il cerchio più interno, in tratto discontinuo, NON fa parte dell'insieme A

- cominciamo dimostrando che A non è aperto
- in base alla definizione, dobbiamo dimostrare che

$$\exists (x_0, y_0) \in A \text{ tale che } \forall R > 0, \text{ si ha } B_R((x_0, y_0)) \not\subset A$$

- detto a parole, cerchiamo un punto (x_0, y_0) di A tale che ogni palla centrata in (x_0, y_0) "esce un po' fuori" da A

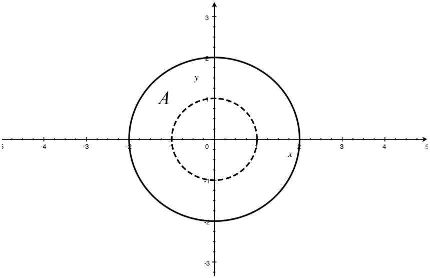


Figura: Riguardiamo un attimo il disegno per capire dove cercare questo punto...

- il disegno ci suggerisce di cercare questo punto sul "cerchio esterno", quello di raggio 2 (i cui punti appartengono tutti ad A, ricorda!)
- prendiamo il punto $(2,0) \in A$ e consideriamo una palla di raggio $R > 0$ qualunque

$$B_R((2,0)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{(x-2)^2 + y^2} < R\right\}$$

- si vede facilmente che si ha

$$\left(2 + \frac{R}{2}, 0\right) \in B_R((2,0)) \qquad \text{ma} \qquad \left(2 + \frac{R}{2}, 0\right) \notin A$$

- quindi $B_R((2,0)) \not\subset A$, per ogni $R > 0$

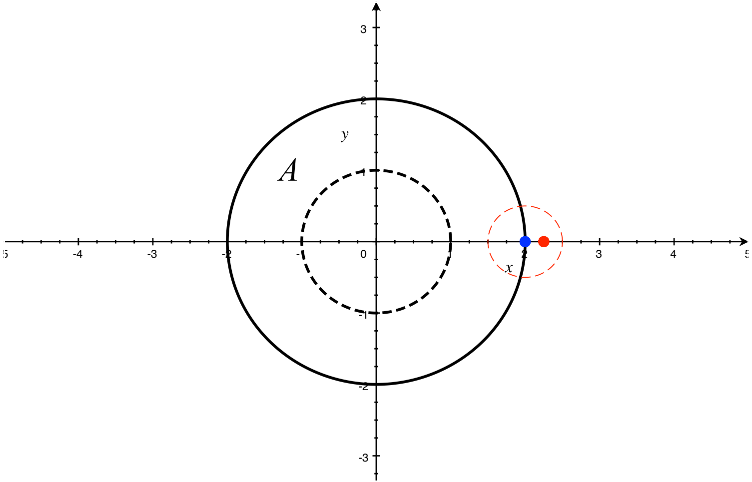
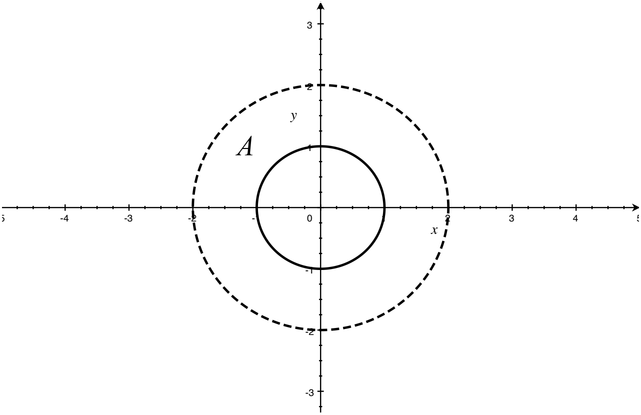


Figura: Il punto $(2,0)$ (in blu) sta in A. Comunque si prenda una palla aperta centrata in $(2,0)$ (tratteggiata in rosso), il punto rosso non appartiene ad A

- per dimostrare che A non è chiuso, usando la definizione, dobbiamo dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus A$ **non è aperto**
- per definizione, $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è formato da tutti i punti la cui distanza dall'origine è maggiore strettamente di 2 oppure minore o uguale di 1



- per dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus A$ non è aperto, ragioniamo come prima
- prendiamo il punto $(1,0) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ e la palla aperta $B_R((1,0))$ con $R > 0$
- allora si ha

$$\left(1+\frac{R}{2},0\right) \in B_R((1,0)) \qquad \text{ma} \qquad \left(1+\frac{R}{2},0\right) \notin (\mathbb{R}^2 \setminus A)$$

- quindi $B_R((1,0)) \not\subset (\mathbb{R}^2 \setminus A)$, per ogni $R > 0$
- $\mathbb{R}^2 \setminus A$ non è aperto

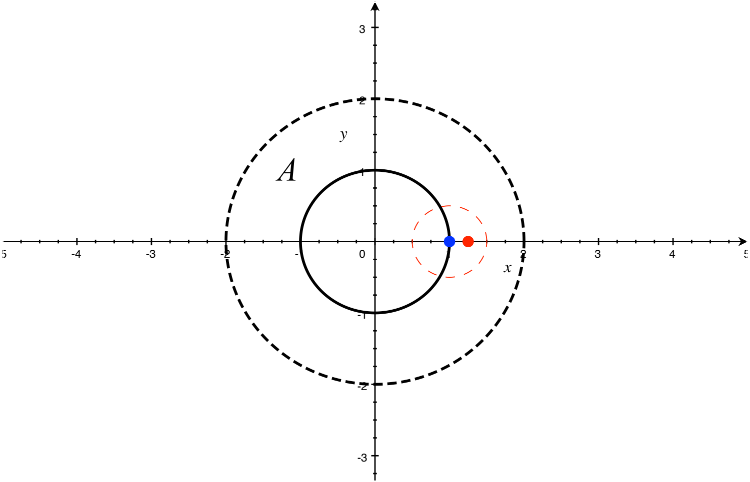


Figura: Il punto $(1,0)$ (in blu) sta in $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Comunque si prenda una palla aperta centrata in $(1,0)$ (tratteggiata in rosso), il punto rosso non appartiene ad $\mathbb{R}^2 \setminus A$ (perché appartiene ad A!)

Esercizio (per casa)

Si dica quali tra i seguenti insiemi sono chiusi, aperti o ne' chiusi ne' aperti

$$A = [0,1] \times (0,1) \qquad B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),\ (0,1)\}$$

$$C = B_R((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x\,y = 0\}$$

Soluzione: A ne' chiuso ne' aperto, B aperto, C aperto, D chiuso

Generalizziamo adesso ad $\mathbb{R}^N$ una definizione che avevamo già visto ad $\text{Analisi Matematica A}$, nel caso di $\mathbb{R}$: quella di **punto di accumulazione**

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, si dice che $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ è **punto di accumulazione per** A se vale la proprietà seguente:

$$\forall R > 0, \quad \overset{*}{B}_R(\mathbf{x}_0) \cap A \neq \emptyset$$

Indichiamo $\mathrm{Acc}(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione per A

Commenti

- Si osservi che l'intersezione non vuota è con le palle **forate**
- la definizione dice che intorno ad $\mathbf{x}_0$ ci sono sempre punti di A, diversi da $\mathbf{x}_0$ stesso

Attenzione!

Un punto $\mathbf{x}_0$ di accumulazione per A potrebbe non appartenere ad A

Esempio

Si prenda l'insieme $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Allora

$$(0,0) \notin A,$$

ma non è difficile vedere che $(0,0) \in \mathrm{Acc}(A)$, ovvero è un punto di accumulazione per A

Attenzione! (e due)

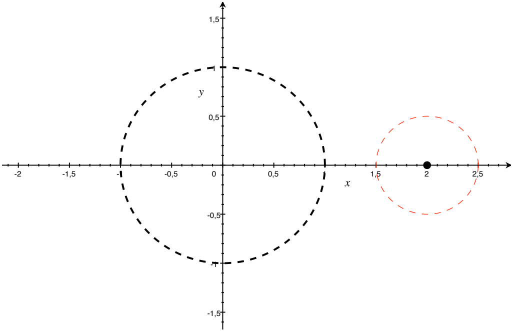
Non tutti i punti di A sono necessariamente di accumulazione per A

Esempio

Si prenda l'insieme $A = B_1(\mathbf{0}) \cup \{(2, 0, \dots, 0)\}$. Allora

$$(2, 0, \dots, 0) \in A,$$

ma non è difficile vedere che $(2, 0, \dots, 0) \notin \mathrm{Acc}(A)$, ovvero **non** è un punto di accumulazione per A



Proposizione importante

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un aperto

Allora ogni $\mathbf{x} \in A$ è un punto di accumulazione per A

Dimostrazione

Per esercizio.

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, si dice che $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ è un **punto di frontiera** di A se vale la proprietà seguente

$$\forall R > 0, \qquad B_R(\mathbf{x}_0) \cap A \neq \emptyset \quad \text{ed anche} \quad B_R(\mathbf{x}_0) \cap (\mathbb{R}^N \setminus A) \neq \emptyset$$

L'insieme dei punti di frontiera di A si indica con il simbolo ∂A. Questo insieme si chiama **frontiera di** A.

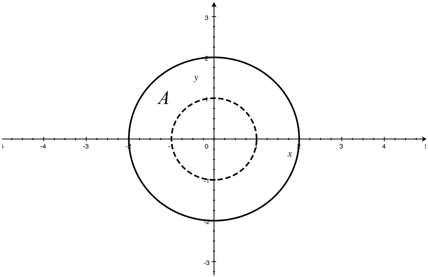
Esempio

Si prenda di nuovo la corona circolare

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\right\}$$

Allora si vede facilmente che

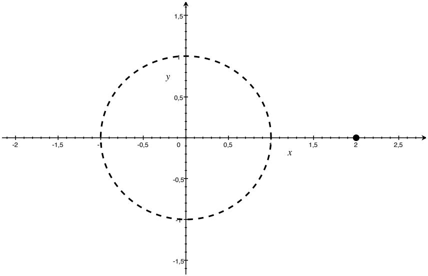
- $\mathrm{Acc}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\right\}$
- $\partial A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ oppure } \sqrt{x^2 + y^2} = 2\right\}$



Esempio

Si prenda di nuovo l'insieme $A = B_1(\mathbf{0}) \cup \{(2, 0, \ldots, 0)\}$. Allora non è difficile vedere che

- $\mathrm{Acc}(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}$
- $\partial A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2 + y^2} = 1\right\} \cup \{(2, 0, \ldots, 0)\}$



Infine, terminiamo questa sezione con l'ultima

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$. Il nuovo insieme

$$A \cup \partial A$$

si chiama **chiusura di** A. Si indica con il simbolo $\overline{A}$.

Esempio

Si prenda l'insieme aperto $B_R(\mathbf{x}_0)$. La sua frontiera è costituita da

$$\partial B_R(\mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \, : \, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R \right\}$$

quindi

$$\overline{B_R(\mathbf{x}_0)} = B_R(\mathbf{x}_0) \cup \partial B_R(\mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \, : \, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq R \right\}$$

Esercizio (per casa)

Si determinino la frontiera, l'insieme dei punti di accumulazione e la chiusura degli insiemi seguenti

$$A = [0,1] \times (0,1) \qquad B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),\,(0,1)\}$$

$$C = B_R((0,0)) \setminus \{(0,0)\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x\,y = 0\}$$

Soluzione

Facciamo insieme l'insieme B, gli altri sono lasciati per casa

- B consiste di tutto il piano $\mathbb{R}^2$, privato dei due punti $(0,0)$ e $(0,1)$
- il complementare di B è quindi rappresentato da $\{(0,0),\,(0,1)\}$

- abbiamo che per ogni palla $B_R((0,0))$ e $B_R((0,1))$, vale che

$$B_R((0,0)) \cap B \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad B_R((0,1)) \cap B \neq \emptyset$$

ma anche

$$B_R((0,0)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) \qquad \text{e} \qquad B_R((0,1)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B),$$

perché i centri delle palle appartengono a queste ultime due intersezioni
- quindi $(0,0)$ e $(0,1)$ fanno parte della frontiera di B e sono gli unici punti con questa proprietà

$$\partial B = \{(0,0),\,(0,1)\}$$

- possiamo quindi già concluderne che

$$\overline{B} = B \cup \partial B = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),\,(0,1)\}\right) \cup \{(0,0),\,(0,1)\} = \mathbb{R}^2$$

- per quanto riguarda $\mathrm{Acc}(B)$, osserviamo innanzitutto che B è aperto (per un esercizio che avete fatto poco fa)
- usando la *Proposizione importante*, sappiamo allora che ogni $(x, y) \in B$ è di accumulazione per B
- ovvero $B \subset \mathrm{Acc}(B)$
- li abbiamo trovati tutti? No, ne mancano due, che sono appunto $(0, 0)$ e $(0, 1)$, i due punti "rimossi"
- infatti, per ogni $R > 0$, è facile vedere che

$$\overset{*}{B}_R\,((0,0)) \cap B \neq \emptyset$$

- lo stesso per il punto $(0, 1)$

- in conclusione, abbiamo

$$\mathrm{Acc}(B) = B \cup \{(0,0),\ (0,1)\} = \mathbb{R}^2$$

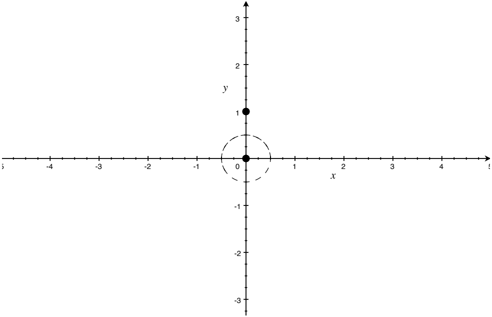


Figura: I punti $(0,0)$ e $(0,1)$ non stanno in B, ma hanno la proprietà che una qualsiasi palla forata ivi centrata, interseca B

II.4 Limiti di funzioni di più variabili

Definizione

Si dice che una successione di punti $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ converge a $\mathbf{y}$ per n che tende a $+\infty$ se

"la distanza tra $\mathbf{x}_n$ e $\mathbf{y}$ tende a 0"

ovvero se vale

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| = 0$$

In tal caso, useremo la notazione

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{y}$$

Osservazione

Si osservi che $\left\{|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali, come quelle viste ad Analisi Matematica A

Il precedente limite va quindi inteso ai sensi della definizione di *limite di successione* vista al primo semestre

In altre parole, detto rigorosamente, la scrittura

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{y}$$

vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \quad |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| < \varepsilon, \quad \text{ per ogni } n \geq n_\varepsilon$$

Usando la notazione con le palle aperte, possiamo anche riscriverla come

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \quad \mathbf{x}_n \in B_\varepsilon(\mathbf{y}), \quad \text{ per ogni } n \geq n_\varepsilon$$

Esempio

Si consideri la successione di punti $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ data da

$$\mathbf{x}_n = \left(\frac{\cos n}{n+1}, \frac{\sin n}{n+1}\right)$$

Allora si ha

$$|\mathbf{x}_n| = \sqrt{\frac{\cos^2 n}{(n+1)^2} + \frac{\sin^2 n}{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{x}_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

da cui possiamo concluderne che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

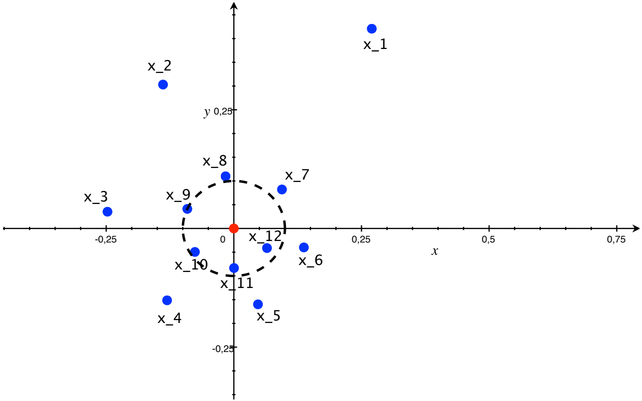


Figura: I primi 12 termini della successione di punti dell'esempio precedente. In rosso, il punto limite $(0, 0)$. Tratteggiata, la palla $B_\varepsilon((0, 0))$, con la scelta $\varepsilon = 1/10$: si noti che a partire dall'indice $n_\varepsilon = 9$, tutti i punti "cascano dentro" la palla selezionata

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ non vuoto e sia $f : A \to \mathbb{R}$

Se $\mathbf{x}_0$ è un punto di accumulazione per A

Si dice che $\underline{f \text{ tende a } L \text{ per } \mathbf{x} \text{ che tende a } \mathbf{x}_0}$ se vale che

$$\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{y}_n) = L \qquad (\text{ si può anche avere } L = \pm\infty)$$

per ogni successione di punti $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_0$$

Notazione

Useremo la notazione

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

Osservazione

La definizione è ben posta, dal momento che

$$\{f(\mathbf{y}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

è una **successione di numeri reali**, per cui il significato di

$$\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{y}_n) = L$$

è stato definito ad Analisi Matematica A

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \text{ tale che } \ |f(\mathbf{y}_n) - L| < \varepsilon, \qquad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon$$

IMPORTANTE

La definizione di limite di funzione di più variabili lo abbiamo dato in termini di limite di successioni

In automatico, tutti i risultati e le proprietà dei limiti di successioni si trasferiscono ai limiti di funzioni di più variabili

In particolare, ereditiamo in automatico:

- l'algebra dei limiti
- le forme di indeterminazione (es. $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$ etc.)
- l'unicità del limite (quando esiste)
- il *Teorema del confronto* (anche detto *Teorema dei Carabinieri*)
- le equivalenze asintotiche e i limiti notevoli

Esempio

Calcoliamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{1+x^2}$$

Non si tratta di una forma indeterminata, inoltre si osserva che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin y = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

quindi per l'*algebra dei limiti* si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{1+x^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

Richiamo da Analisi Matematica A

Per funzioni di una variabile reale, abbiamo visto che possiamo definire anche il **limite destro** ed il **limite sinistro**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste se e solo se il limite destro e quello sinistro esistono e coincidono

Un analogo in più variabili?

In più variabili, le cose sono molto più complicate

Già nel caso di $\mathbb{R}^2$, fissato un punto limite (x_0, y_0), esistono **infiniti modi** di avvicinarsi a questo punto, non solo "da destra" o "da sinistra"

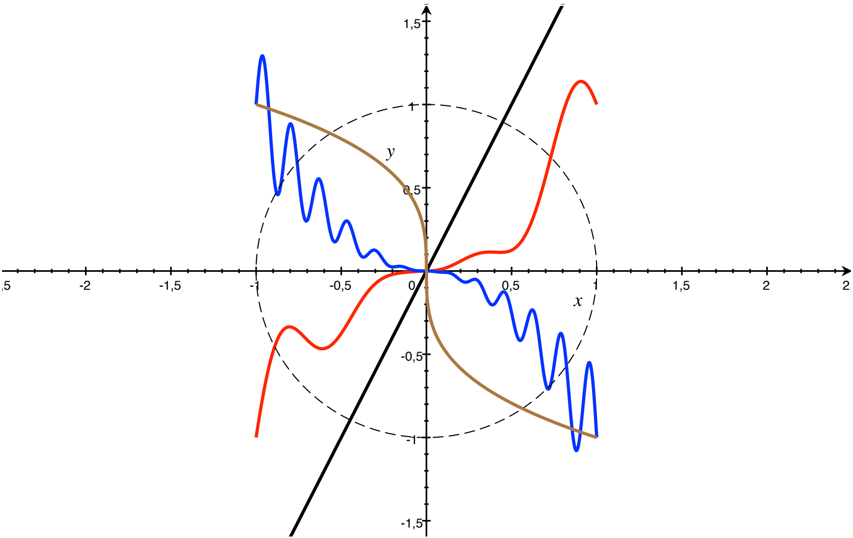


Figura: Evidenziate con colori diversi, alcuni diversi modi di avvicinarsi a $(0, 0)$

- Per funzioni di una variabile, sappiamo già che se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

  allora

$$\boxed{\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

- Per funzioni di più variabili, il corrispettivo di questo risultato dev'essere qualcosa del tipo

  "*se esistono due modi diversi di avvicinarsi a* $\mathbf{x}_0$
  per cui f *tende a due valori diversi*
  allora il limite di f *per* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ *non esiste*"

Teorema ("Criterio delle 2 curve")

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ *non vuoto e sia* $f : A \to \mathbb{R}$

Sia $\mathbf{x}_0$ *è un punto di accumulazione per* A

Supponiamo che esistano **due curve continue semplici**

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^N \qquad e \qquad \eta : [-1, 1] \to \mathbb{R}^N$$

tali che

- $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A \cup \{\mathbf{x}_0\}$ *e* $\mathrm{Im}(\eta) \subset A \cup \{\mathbf{x}_0\}$
- $\gamma(0) = \mathbf{x}_0 = \eta(0)$

Se

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) \neq \lim_{t \to 0} f(\eta(t))$$

allora

$$\boxed{\nexists \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}$$

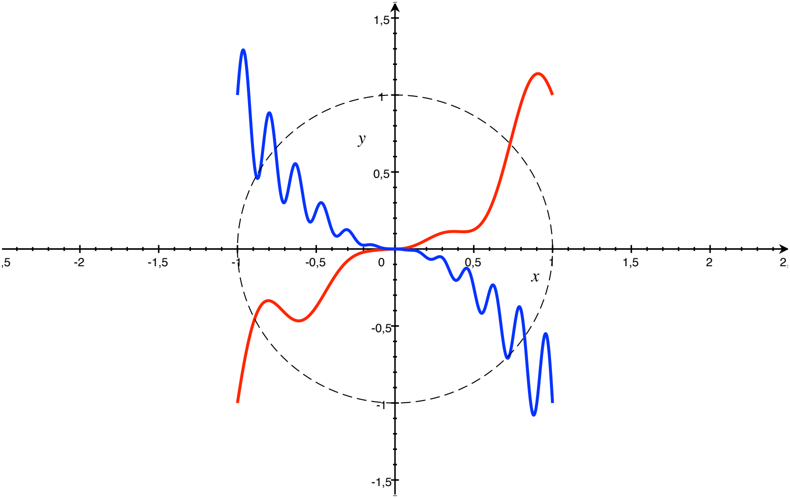


Figura: Il Teorema precedente afferma che se *il limite nell'origine della funzione f ristretta alla curva rossa* è diverso dal *limite nell'origine della funzione f ristretta alla curva blu*, allora f non ammette limite nell'origine

Esercizio

Si dica se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

In caso affermativo, lo si calcoli.

Soluzione

- Osserviamo intanto che la funzione

  $$f(x,y) = \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  ha come dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- il punto limite $(0,0)$ è punto di accumulazione per il dominio, quindi ha senso porsi la domanda del calcolo del limite
- dobbiamo intanto cercare di "intuire" se il limite esiste oppure no

- si noti che si tratta di una forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$
- facciamo delle considerazioni "in libertà", che provino a fare appello a quello che sappiamo dai limiti per funzioni di una variabile
- la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite

$$f(x, y) = \frac{x\, y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

è all'incirca un rapporto fra due "potenze"

- ovvero, con un po' di fantasia, possiamo pensare

$$x\,y = \text{“potenza seconda''}$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= \text{“radice quadrata di potenza seconda''}\\ &= \text{“potenza prima''}\end{aligned}$$

- il limite che stiamo calcolando è quindi un po' simile al limite di una variabile

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t}$$

che esiste e fa 0

- cosa abbiamo dimostrato? Niente, ma le considerazioni precedenti (che sono **fanta-matematica**, e non matematica) suggeriscono che il nostro limite **esista e sia nullo**

- ora che abbiamo avuto un'intuizione, proviamo a dimostrare che è vera
- proviamo a maggiorare la nostra funzione in valore assoluto, con qualcosa che tende a 0
- la conclusione che vogliamo seguirà a quel punto dal *Teorema del confronto* (anche detto *Teorema dei carabinieri*)
- abbiamo

$$\left|\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x\,y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,|x\,y|$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)$$

dalla **disuguaglianza di Young** (vedi *Lezione 1*)

- abbiamo quindi trovato

$$\left|\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

- si ottiene dunque

$$0 \leq \left|\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

- abbiamo in conclusione

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Esercizio (per casa)

Si dimostri che per ogni $\alpha < 1$ *vale*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = 0$$

Suggerimento: provare a procedere come prima...

Esercizio

Si dica se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

In caso affermativo, lo si calcoli.

Soluzione

- Osserviamo che la funzione

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

  ha come dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- il punto limite $(0,0)$ è punto di accumulazione per il dominio, quindi di nuovo ha senso porsi la domanda del calcolo del limite
- proviamo a replicare subito il conto precedente
- usiamo quindi la **disuguaglianza di Young** e vediamo se ci permette di concludere

- abbiamo

$$\left|\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x\,y|}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\,|x\,y|$$
$$\leq \frac{1}{x^2+y^2}\,\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)$$

- semplificando nell'ultima espressione, si trova

$$\left|\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

- siamo contenti? Non tanto. Stavolta non possiamo usare il *Teorema del confronto*, dal momento che abbiamo maggiorato con $1/2$ (che non tende a 0, ovviamente!)

- abbiamo per ora dimostrato che la quantità di cui vogliamo calcolare il limite è

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x\,y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{per ogni } (x, y) \neq (0, 0)$$

- che succede se ci restringiamo alla retta $y = x$?

- la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite, diventa

$$f(x,x) = \frac{x\,x}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2\,x^2} = \frac{1}{2}$$

- la funzione è costante sulla retta $y = x$, quindi ovviamente

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$$

- che succede se ci restringiamo alla retta $y = -x$?
- la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite, diventa

$$f(x,-x) = \frac{x\,(-x)}{x^2 + (-x)^2} = -\frac{x^2}{2\,x^2} = -\frac{1}{2}$$

- la funzione è costante anche sulla retta $y = -x$, quindi ovviamente

$$\lim_{x \to 0} f(x,-x) = -\frac{1}{2}$$

- quindi? Abbiamo trovate due curve

$$\gamma(x) = (x, x) \qquad \text{e} \qquad \eta(x) = (x, -x)$$

passanti dal punto limite $(0,0)$ e tali che

$$\lim_{x \to 0} f(\gamma(x)) \neq \lim_{x \to 0} f(\eta(x))$$

- per il *Criterio delle* 2 *curve*, ne concludiamo che

$$\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x\,y}{x^2 + y^2}$$

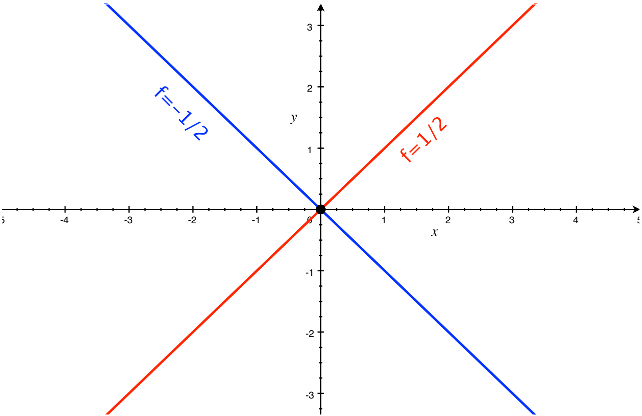


Figura: La restrizione di f lungo la bisettrice $y = x$ (rosso) vale costantemente $1/2$ (in altre parole, questa retta è un insieme di livello). La restrizione di f lungo la bisettrice $y = -x$ (blu) vale costantemente $1 - /2$ (quindi anche questa retta è un insieme di livello)

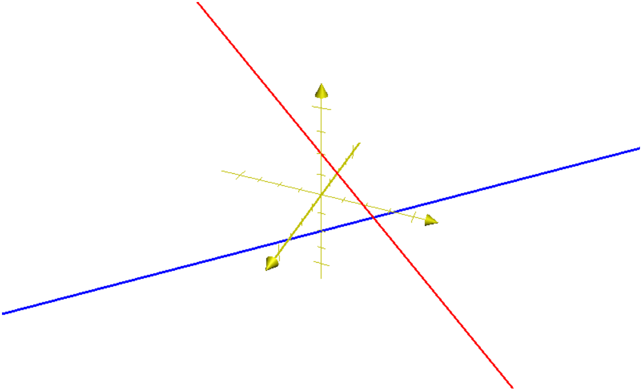


Figura: Le due rette si trovano sul grafico di f, ovvero...

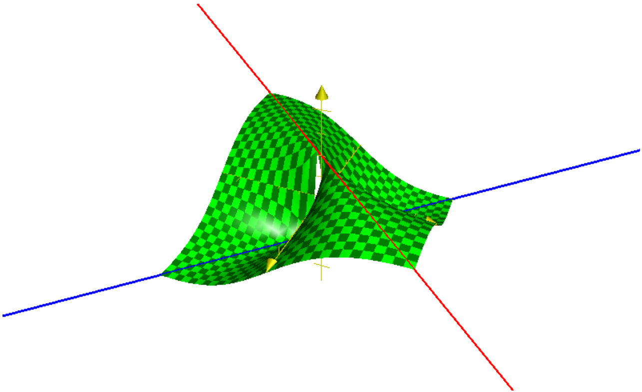


Figura: ...ecco il grafico completo della funzione f dell'esercizio precedente. La funzione non può ammettere limite per $(x, y) \to (0, 0)$

Esercizio (per casa)

Dimostrare che la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^4+y^2}, \qquad \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ha la seguente proprietà:

1. la restrizione di f ad una qualsiasi retta passante per l'origine, ammette limite in $(0,0)$ e tale limite vale sempre 0
2. si ha che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

(**Suggerimento:** per il punto 1., si tratta di studiare il limite della funzione di una variabile $f(x, m\,x)$, in funzione del parametro m....per il punto 2., provate ad applicare il *Criterio delle* 2 *curve*...)

Esercizio

Si dimostri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x\,y)}{x^2+y^2} = 0$$

Soluzione

- Di nuovo, si tratta di una forma indeterminata $0/0$
- il punto limite $(0,0)$ è punto di accumulazione per il dominio della funzione in esame
- utilizziamo innanzitutto l'asintotico

$$\sin t \sim t, \qquad \text{per } t \to 0$$

- abbiamo allora

$$\sin^2(x\,y) \sim (x\,y)^2, \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

- il limite che dobbiamo calcolare è quindi equivalente a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x\,y)^2}{x^2+y^2} = 0$$

- adesso ci basta osservare che

$$\left|\frac{(x\,y)^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x\,y}{x^2+y^2}\right|\,|x\,y| \le \frac{1}{2}\,|x\,y|,$$

  dove abbiamo usato un esercizio precedente, per maggiorare con $1/2$
- la conclusione segue adesso dal *Teorema del confronto*

Esercizio (per casa)

Si dimostri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4} = 0$$

(**Suggerimento:** si osservi che

$$\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4} = x\,\frac{x^2}{x^2+y^4} + y\,\frac{y^4}{x^2+y^4}$$

e si tenti di utilizzare il *Teorema del confronto*...)