Analisi Matematica B
– *Lezione 7* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 24 Marzo 2020

Proposizione [Permanenza del segno “strong”]

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ *non vuoto e* $f : A \to \mathbb{R}$

Sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ *punto di accumulazione per* A

Se

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L > 0$$

allora esiste una palla $B_R(\mathbf{x}_0)$ *tale che*

$$f(\mathbf{x}) > 0, \qquad \forall \mathbf{x} \in \overset{*}{B}_R(\mathbf{x}_0) \cap A$$

Dimostrazione

- Osserviamo innanzitutto che

$$\forall r > 0 \qquad \overset{*}{B}_r(\mathbf{x}_0) \cap A \neq \emptyset$$

per definizione di punto di accumulazione

- procediamo per assurdo
- supponiamo che per ogni $R > 0$, esista $\mathbf{y}_R \in \overset{*}{B}_R(\mathbf{x}_0) \cap A$ tale che
$$f(\mathbf{y}_R) \leq 0$$
- in particolare, prendendo il raggio $R = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ esiste
$$\mathbf{y}_n \in \overset{*}{B}_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x}_0) \cap A$$
tale che
$$f(\mathbf{y}_n) \leq 0$$
- abbiamo costruito una successione di punti $\{\mathbf{y}_n\}_{n \geq 1}$ contenuta in A e tale che
$$|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad f(\mathbf{y}_n) \leq 0$$

- dal momento che
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_0$$
usando la definizione di limite e l'ipotesi, si ha
$$\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{y}_n) = L > 0$$

- d'altra parte, usando la *permanenza del segno "soft"* per le successioni reali (vedi Analisi Matematica A), abbiamo anche
$$f(\mathbf{y}_n) \le 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L = \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{y}_n) \le 0$$

- confrontando le ultime due equazioni, abbiamo ottenuto un assurdo
- fine della dimostrazione

II.5 Funzioni continue

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ non vuoto e $\mathbf{x}_0 \in A$ un punto di accumulazione per A

Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ è **continua in $\mathbf{x}_0$** se vale

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ è **continua** se è continua in ogni punto di accumulazione per il suo dominio A

Osservazione

Si tratta della definizione di continuità che abbiamo già visto per funzioni di una variabile, opportunamente adattata

Vediamo alcuni

Esempi

Le seguenti funzioni sono continue sul loro insieme di definizione

$$f(x,y) = x\,y \qquad \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$g(x,y,z) = \log\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{per } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$h(x,y) = \frac{\sin(x\,y)}{x^2+y^2}, \qquad \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$k(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}, \qquad \text{per } x \neq y$$

Esempio

La funzione definita su $\mathbb{R}^2$ tramite

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in ogni punto (x_0, y_0)

Infatti, per $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, si vede che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x_0\,y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = f(x_0,y_0)$$

dal momento che non si tratta di una forma indeterminata

Nel punto $(0, 0)$, abbiamo già calcolato il limite (vedi *Lezione 6*)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0)$$

quindi è continua anche in $(0, 0)$

Esercizio per casa

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x - 2y)}{x - y}, & \text{se } x \neq y, \\ \\ \alpha, & \text{se } x = y \end{cases}$$

Si dica per quali valori del parametro α, la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}^2$

Suggerimento: si ricordi che $\sin t \sim$ .... per $t \to 0$...

Ricordiamo la definizione di **insieme di livello**

$$E_f(t) = \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, f(\mathbf{x}) = t \Big\}$$

Definizione

Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ non vuoto e $f : A \to \mathbb{R}$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, definiamo l'**insieme di sopralivello**

$$E_f^+(t) = \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, f(\mathbf{x}) > t \Big\}$$

e l'**insieme di sottolivello**

$$E_f^-(t) = \Big\{ \mathbf{x} \in A \,:\, f(\mathbf{x}) < t \Big\}$$

Osservazione

Si osservi che $E_f(t)$, $E_f^+(t)$ e $E_f^-(t)$ sono sempre sotto insiemi del dominio A della funzione f

Esempio

Riprendiamo in considerazione la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

che avevamo già studiato

Avevamo già visto che gli insiemi di livello

$$E_f(t) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2 + y^2} = t\right\}$$

erano

- vuoti per $t < 0$
- il solo punto $\{(0, 0)\}$ per $t = 0$
- la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio t, per $t > 0$

Occupiamoci adesso degli insiemi di sopralivello e di sottolivello

- se $t < 0$, si ha

$$E_f^-(t) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} < t\right\} = \emptyset$$

e

$$E_f^+(t) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} > t\right\} = \mathbb{R}^2$$

- se $t = 0$, si ha

$$E_f^-(0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} < 0\right\} = \emptyset$$

e

$$E_f^+(0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} > 0\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

- se $t > 0$, si ha

$$E_f^-(t) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} < t\right\} = B_t((0,0))$$

e

$$E_f^+(t) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} > t\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_t((0,0))}$$

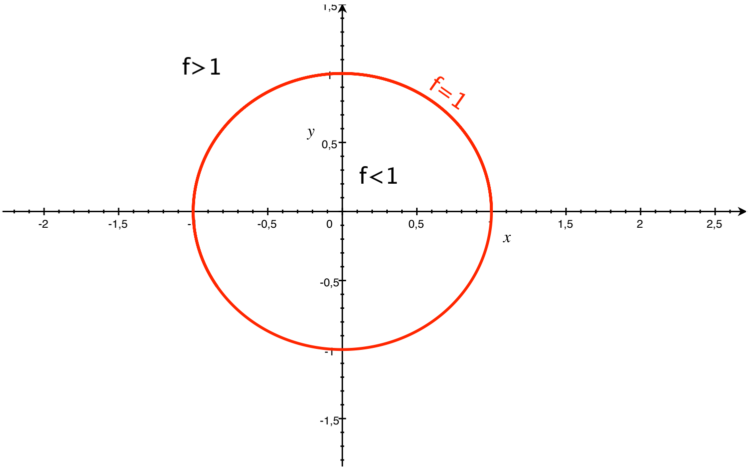

Figura: In rosso, l'insieme di livello 1 per la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'interno del cerchio è l'insieme di sottolivello 1, mentre l'esterno forma l'insieme di sopralivello 1.

Proposizione

Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ **continua**

Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$

- $E_f^+(t)$ *e* $E_f^-(t)$ *sono aperti*
- $E_f(t)$ *è chiuso*

Dimostrazione

- Dimostriamo che $E_f^+(t)$ è aperto
- se $E_f^+(t)$ è vuoto, sappiamo già che l'insieme vuoto è aperto (visto in precedenza)
- possiamo supporre che $E_f^+(t) \neq \emptyset$
- dobbiamo dimostrare che per ogni $\mathbf{x}_0 \in E_f^+(t)$, esiste una palla $B_R(\mathbf{x}_0)$ tale che

$$B_R(\mathbf{x}_0) \subset E_f^+(t)$$

- sia $\mathbf{x}_0 \in E_f^+(t)$, ovvero

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad f(\mathbf{x}_0) > t$$

- sfruttiamo adesso la continuità di f: sappiamo che

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) > t$$

- in particolare, se definiamo $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - t$, questa è ancora continua e vale

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) - t > 0$$

- usando la *permanenza del segno "strong"*, abbiamo che esiste $B_R(\mathbf{x}_0)$ tale che

$$g(\mathbf{x}) > 0, \qquad \forall \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0)$$

- ovvero, ricordando la definizione di $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - t$ si ha

$$f(\mathbf{x}) > t, \qquad \forall \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0)$$

- in altre parole, abbiamo mostrato che

$$\mathbf{x} \in E_f^+(t) \text{ per ogni } \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0)$$

- ovvero

$$B_R(\mathbf{x}_0) \subset E_f^+(t),$$

come volevamo!

- occupiamoci adesso di dimostrare che il sottolivello

$$E_f^-(t) = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) < t\Big\}$$

  è anch'esso aperto

- possiamo certamente ripetere parola per parola la dimostrazione precedente...

- ...oppure osservare che

$$\begin{aligned} E_f^-(t) &= \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) < t\Big\} \\ &= \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, -f(\mathbf{x}) > -t\Big\} = E_{-f}^+(-t) \end{aligned}$$

- in altre parole, ogni sottolivello della funzione continua f, si può scrivere come un sopralivello della funzione continua $-f$

- per quanto dimostrato nella prima parte, allora $E_f^-(t)$ è aperto

- infine, ci resta da dimostrare che

$$E_f(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) = t\}$$

  è chiuso

- basta osservare che

$$E_f(t) = \mathbb{R}^N \setminus (E_f^+(t) \cup E_f^-(t))$$

- $E_f^+(t) \cup E_f^-(t)$ è aperto in quanto unione di 2 aperti (*<u>Esercizio x casa</u>: se A, B sono aperti, allora $A \cup B$ è aperto*)
- otteniamo la tesi, ricordando che il complementare di un insieme aperto, è un insieme chiuso (per definizione)

Corollario

Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ **continua**

Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ *gli insiemi*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) \geq t\} \qquad e \qquad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \,:\, f(\mathbf{x}) \leq t\}$$

sono chiusi

Dimostrazione

- Basta osservare che i complementari di questi insiemi sono

  $$E_f^-(t) \qquad \text{e} \qquad E_f^+(t),$$

  rispettivamente

- dal momento che questi ultimi sono aperti (risultato precedente), otteniamo la conclusione ricordando la definizione di insieme chiuso

Ci serve ancora una definizione di topologia

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$, si dice che

- A è **limitato** se

  $$\exists M > 0 \qquad \text{tale che} \qquad A \subset B_M(\mathbf{0})$$

  ovvero se A è contenuto dentro una palla centrata nell'origine

- A è **illimitato** se

  $$\forall M > 0 \qquad \text{si ha} \qquad A \setminus B_M(\mathbf{0}) \neq \emptyset$$

  ovvero se A non è mai interamente contenuto dentro una palla, qualunque sia il raggio della palla

Esempi

1. una palla $B_R(\mathbf{x}_0)$ è un insieme limitato
2. il quadrato

   $$Q = [0,1] \times [0,1] = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\Big\}$$

   è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$
3. il semipiano superiore

   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$$

   è un insieme illimitato di $\mathbb{R}^2$

Teorema [Weierstrass]

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme* **chiuso e limitato**

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione* **continua**

Allora esistono

$$\max_A f \qquad e \qquad \min_A f$$

Osservazione

- Questa è la versione in più variabili del Teorema che avevamo visto ad Analisi Matematica A
- Come già visto per il caso di funzioni di una variabile, se si rimuove una sola delle ipotesi, il Teorema cessa di essere vero

Nel seguito del corso, vorremo occuparci di **problemi di ottimizzazione** in più variabili

Ovvero di determinare il massimo e/o minimo di una funzione f su un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$

"Problema modello"
Date due funzioni continue f e g, determinare

$$\min\left\{f(\mathbf{x}) \,:\, g(\mathbf{x}) \le 0\right\} \qquad \text{e} \qquad \max\left\{f(\mathbf{x}) \,:\, g(\mathbf{x}) \le 0\right\}$$

- g è continua, quindi l'insieme (chiamato **vincolo**)

  $$\{\mathbf{x} \,:\, g(\mathbf{x}) \le 0\}$$

  è chiuso
- nei casi in cui è anche limitato, per *Teorema di Weierstrass* sappiamo che i due problemi sopra ammettono soluzione

— Come determinarli? —

Esempio di “problema modello”

Tanto per fissare le idee, prendiamo $N = 2$ e

$$f(x, y) = x\,y \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

allora il “problema modello” diventa

$$\min \left\{ x\,y \,:\, x^2 + y^2 \le 1 \right\} \qquad \text{e} \qquad \max \left\{ x\,y \,:\, x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

ovvero vogliamo trovare il massimo ed il minimo della funzione $x\,y$, sotto il vincolo che il punto (x, y) debba appartenere al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1

Si osservi che il vincolo

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

è chiuso e limitato. Possiamo quindi applicare *Weierstrass*

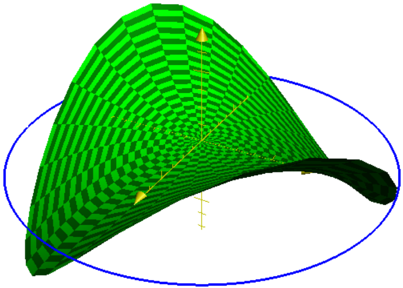

Figura: Il grafico della funzione $f(x, y) = x\,y$ (è una specie di *patatina Pringles*). La linea blu denota la frontiera dell'insieme su cui cerchiamo massimo e minimo della funzione.

Capitolo III

“*Calcolo differenziale in più variabili reali*”

III.1 Derivate parziali

Vogliamo in questa sezione introdurre il
concetto di derivabilità per una funzione di più variabili

Ci sarà utile tenere presente le definizioni ed i risultati per le funzioni di una variabile, in modo da fare un raffronto costante tra le due situazioni

MEMO 1

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in (a, b)$, *si definisce* **derivata di f in x_0** *come*

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ammesso che tale limite esista e sia finito

• Abbiamo visto che la derivata per una funzione di una variabile era uno strumento piuttosto utile per farne uno studio qualitativo (es. *intervalli di monotonia, punti di max e min*)

• Vorremo trovare un concetto analogo per funzioni di più variabili

Idea

Perché non proviamo a copiare la definizione di una variabile?

Difficoltà

Se la funzione è definita su $\mathbb{R}^N$, cosa vuol dire fare il rapporto incrementale?

Dato un punto $\mathbf{x}_0$, abbiamo adesso infinite direzioni lungo cui "allontanarci di poco" da $\mathbf{x}_0$!

Non solo "verso destra" o "verso sinistra", come nel caso di una variabile

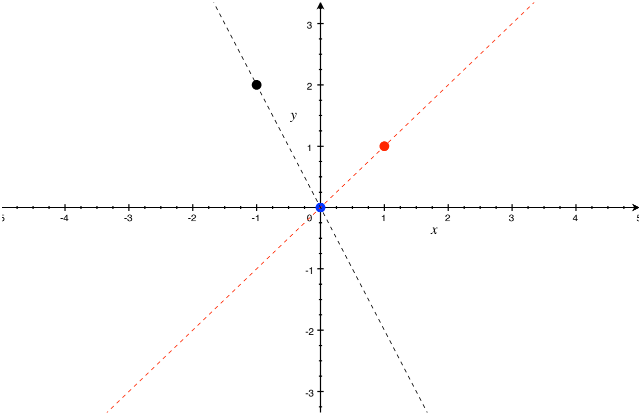

Figura: Fissiamo il punto $(0, 0)$ e supponiamo di voler guardare gli incrementi di una funzione $f(x, y)$, per (x, y) "vicini" a $(0, 0)$. Possiamo prendere questi incrementi lungo infinite direzioni: ad esempio, tanto per fissare le idee, lungo la retta rossa o lungo la retta nera.

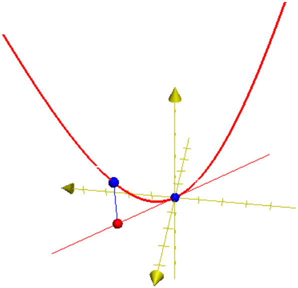

Figura: Il grafico della f ristretta alla retta rossa

Possiamo considerare il rapporto incrementale corrispondente

$$\frac{f(\text{punto rosso}) - f(0,0)}{\text{distanza}}$$

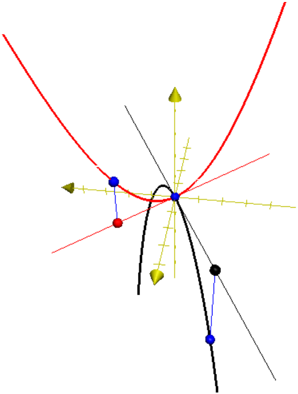

Figura: Il grafico della f ristretta alla retta nera

...ma possiamo anche considerare il rapporto incrementale

$$\frac{f(\text{punto nero}) - f(0,0)}{\text{distanza}}$$

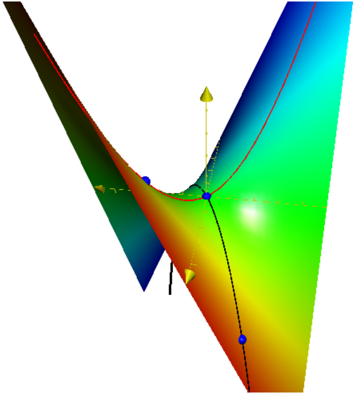

Figura: Il grafico completo della funzione, con evidenziate le due direzioni in cui guardiamo gli incrementi

Essendoci infinite direzioni lungo cui guardare il limite dei rapporti incrementali, dobbiamo aspettarci che per una funzione di più variabili ci siano....infinite derivate!

ARGH! :(

Definizione [Derivata direzionale]

Sia $\mathbf{v}$ un versore di $\mathbb{R}^N$, ovvero $|\mathbf{v}| = 1$

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$

Se $\mathbf{x}_0 \in A$, si definisce **derivata di f in $\mathbf{x}_0$ lungo la direzione $\mathbf{v}$** come

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

ammesso che tale limite esista e sia finito

Osservazione

Vedremo tra un attimo che, nelle situazioni per noi più interessanti, basterà limitarci a prendere le derivate in un numero N di direzioni opportune...

Come caso particolare della definizione precedente, prendendo come direzione $\mathbf{v}$ un versore della base canonica

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-esima posizione}}, 0, \dots, 0) \qquad \text{per } i = 1, \dots, N$$

abbiamo la seguente

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$

Se $\mathbf{x}_0 \in A$, si definisce **derivata parziale di f in $\mathbf{x}_0$ rispetto alla variabile** x_i come

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

ammesso che tale limite esista e sia finito

- La definizione precedente forse si apprezza meglio nel caso di $N = 2$ variabili

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- Ovvero la derivata parziale si calcola "congelando una variabile" e facendo il limite del rapporto incrementale come funzione dell'altra variabile

Operativamente

La derivata parziale in x si calcola trattando y come un parametro e derivando f come se fosse funzione soltanto di x

La derivata parziale in y si calcola trattando x come un parametro e derivando f come se fosse funzione soltanto di y

Esempio

Si prenda la funzione $f(x, y) = x\, y$ definita su $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\, y - x\, y}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x\, y} + h\, y - \cancel{x\, y}}{h} = y \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = y \end{aligned}$$

In modo simile, si fa vedere che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$

Se $\mathbf{x}_0 \in A$ ed f ammette derivate parziali in $\mathbf{x}_0$ rispetto ad ogni variabile, si definisce **gradiente di f in $\mathbf{x}_0$** il vettore

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \right)$$

In tal caso, la funzione f si dice **derivabile in $\mathbf{x}_0$**

Esempio

Sia $f(x, y) = x\, y$, il suo gradiente in un generico punto (x, y) è dato da

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (y, x)$$

Esercizio

Si calcolino i gradienti delle seguenti funzioni di due o più variabili, nei punti in cui questo è possibile

$$f(x,y) = e^{x\,y^2} \qquad g(x,y,z) = x^2\,y\,\log z$$

$$\boxed{h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Soluzione

1. la funzione f ammette derivate parziali in ogni punto

   Fissando y, considerando f come funzione della sola variabile x ed usando la formula di derivazione della funzione composta si ha

   $$\frac{\partial}{\partial x}(e^{x\,y^2}) = e^{x\,y^2}\,y^2$$

Similmente, si trova

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{x\,y^2}) = e^{x\,y^2}\,2\,y\,x$$

In conclusione, si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x\,y^2}\,y^2,\; e^{x\,y^2}\,2\,y\,x\right)$$

2. Osserviamo che la funzione $g(x,y,z) = x^2\,y\,\log z$ è definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,+\infty)$

   In altre parole, dobbiamo imporre che sia $z > 0$

   Sul suo dominio, la funzione ammette derivate parziali in ogni punto

Fissando y e z, considerando f come funzione della sola variabile x

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2\, y\, \log z) = 2\, x\, y\, \log z$$

In modo simile, si trova

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2\, y\, \log z) = x^2\, \log z \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial z}(x^2\, y\, \log z) = \frac{x^2\, y}{z}$$

In conclusione, si ha

$$\nabla g(x, y, z) = \left(2\, x\, y\, \log z,\ x^2\, \log z,\ \frac{x^2\, y}{z}\right)$$

3. la funzione $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$

   Tuttavia, ricordando che la funzione "radice quadrata" non è derivabile quando il suo argomento si annulla, abbiamo che h **ammette derivate parziali soltanto in** $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

   Infatti, per $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} (2\, x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

In modo simile, si ottiene anche, sempre per $(x, y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

In conclusione, si ha

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{per } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Dimostriamo che effettivamente h non è derivabile in $(0,0)$

Basta osservare che

$$h(x,0) = \sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{e} \qquad h(0,y) = \sqrt{y^2} = |y|$$

e ricordare che la funzione "valore assoluto" non è derivabile nell'origine

Esercizio (per casa)

Si generalizzi l'ultimo esempio, ovvero si calcoli il gradiente della funzione di N variabili

$$h(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$$

nei punti in cui questo è possibile

Soluzione: dovreste ottenere

$$\nabla h(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \qquad \text{per } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

e che per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ la funzione non è derivabile

Implicazioni della derivabilità?

Dal fatto che f ammetta derivate parziali, possiamo dedurne qualche altra proprietà interessante?

MEMO 2

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$, allora è continua in $x_0 \in (a, b)$

Possiamo ragionevolmente (?) aspettarci che valga qualcosa di simile in più variabili....

...ovvero se esistono

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0)$$

allora f è continua in $\mathbf{x}_0$....

NO

Esempio

Prendiamo la funzione così definita

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0 \text{ oppure } y = 0 \end{cases}$$

Ovvero la funzione f vale indenticamente 1, tranne in corrispondenza degli assi cartesiani, in cui vale 0

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Quindi f ammette derivate parziali in $(0,0)$

D'altra parte f **non è continua** in $(0,0)$, dal momento che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Infatti, usando il *Criterio delle* 2 *curve* si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$$

ovvero

- lungo l'asse delle x la funzione f si annulla identicamente e quindi nell'origine il limite fa 0
- lungo la bisettrice $y = x$ la funzione f vale identicamente 1 (tranne nel punto limite), quindi il limite fa 1

Esercizio per casa

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\, y}{x^4 + y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si dimostri che

1. f *è derivabile in* $(0,0)$ *lungo ogni direzione* $\mathbf{v}$
2. f *non è continua in* $(0,0)$

Soluzione

Facciamo insieme il punto 1., vi lascio per casa il punto 2.

- Dobbiamo dimostrare che per ogni direzione

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \qquad \text{con} \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$$

  esiste ed è finito

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t}$$

- ricordando che $f(0,0) = 0$, in base dalla definizione di f abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t} &= \frac{1}{t}\,\frac{(t\,v_1)^2\,t\,v_2}{(t\,v_1)^4 + (t\,v_2)^2} \\ &= \frac{t^3\,(v_1)^2\,v_2}{t\,(t^4\,(v_1)^4 + t^2\,(v_2)^2)}\end{aligned}$$

- abbiamo allora

$$\frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t} = \frac{(v_1)^2\,v_2}{t^2\,(v_1)^4 + (v_2)^2}$$

- se $v_2 \neq 0$ otteniamo dunque

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(v_1)^2\,v_2}{t^2\,(v_1)^4 + (v_2)^2} = \frac{(v_1)^2}{v_2}\end{aligned}$$

- d'altra parte se $v_2 = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2\,(v_1)^4} = 0\end{aligned}$$

Per concludere l'esercizio, dimostrate che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\, y}{x^4 + y^2}$$

usando il *Criterio delle* 2 *curve* (*non usate delle rette, ma delle parabole....*)