Analisi Matematica B
– *Lezione 8* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 25 Marzo 2020

III.2 Punti critici

- Abbiamo visto nella sezione precedente che per una funzione di più variabili

$$\text{derivabile} \qquad \not\Longrightarrow \qquad \text{continua}$$

diversamente dal caso di funzioni di una variabile

- Questo forse ci ha lasciato un po' di amaro in bocca...
- ...cerchiamo di riguadagnare un po' di fiducia!

MEMO 3 (Teorema di Fermat)

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile e tale che* $x_0 \in (a, b)$ *sia un punto di minimo locale. Allora*

$$f'(x_0) = 0$$

Domanda

Vale qualcosa di analogo in più variabili?

Per rispondere, abbiamo intanto bisogno della seguente

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e $f : A \to \mathbb{R}$

Sia $\mathbf{x}_0 \in A$ punto di accumulazione per A, si dice che questo punto è un:

- **punto di minimo locale** (o **relativo**) **per** f
  se esiste $B_R(\mathbf{x}_0)$ tale che
  $$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0), \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0) \cap A$$

- **punto di massimo locale** (o **relativo**) **per** f
  se esiste $B_R(\mathbf{x}_0) \subset A$ tale che
  $$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0), \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0) \cap A$$

Teorema [Fermat per N variabili]

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ **aperto**

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *e sia* $\mathbf{x}_0 \in A$ *un punto di minimo locale per* f

Se f *è derivabile in* $\mathbf{x}_0$*, allora vale*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

Dimostrazione

- Consideriamo per semplicità il caso $N = 2$, i.e. due variabili
- dal momento che A è aperto, sappiamo che (x_0, y_0) è di accumulazione per A
- per ipotesi, esiste $B_R((x_0, y_0))$ tale che

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \qquad \text{per ogni } (x, y) \in B_R((x_0, y_0)) \cap A$$

- sempre dal fatto che A è aperto, possiamo supporre (a patto di prendere R più piccolo), che sia $B_R((x_0, y_0)) \subset A$

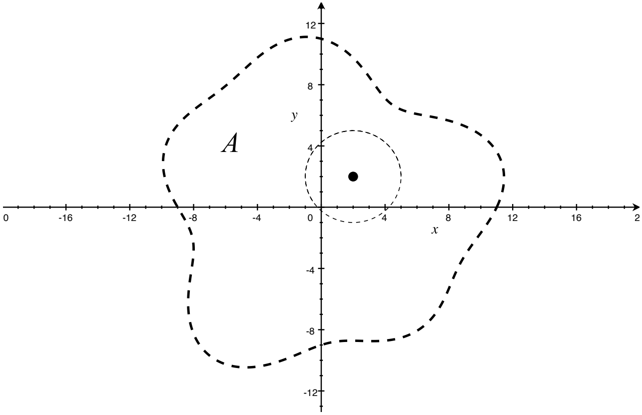

Figura: L'insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. In evidenza, il punto di minimo locale (x_0, y_0) e la palla contenuta in A, in cui $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

- "congeliamo" adesso la seconda variabile y ed introduciamo la funzione di una variabile

$$g(x) = f(x, y_0)$$

- per ipotesi, sappiamo che per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$g(x) = f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0) = g(x_0)$$

- x_0 è punto di minimo per la funzione di una variabile g, relativamente all'intervallo aperto $(x_0 - R, x_0 + R)$
- d'altronde, g è derivabile in x_0 perché

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

- possiamo applicare il *Teorema di Fermat* (per funzioni di una variabile) e dedurne che

$$g'(x_0) = 0$$

- ovvero, in base a ciò che abbiamo osservato in precedenza

$$0 = g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

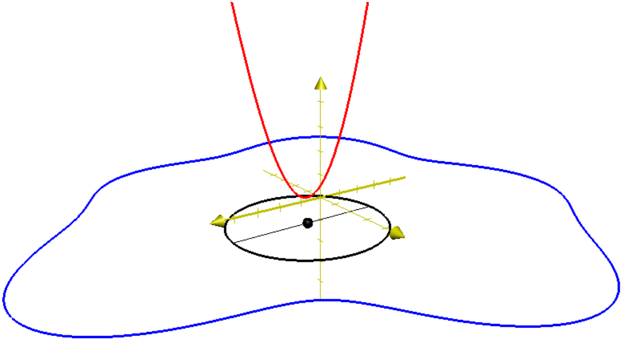

Figura: La costruzione della dimostrazione: in rosso, il grafico della funzione di una variabile $x \mapsto f(x, y_0)$, definita sull'intervallo (segmento nero) $(x_0 - R, x_0 + R)$. Per $x = x_0$ abbiamo un minimo interno all'intervallo, quindi la derivata in x si annulla.

- per concludere la dimostrazione, ci resta da dimostrare che si ha anche

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

- a questo scopo, riproduciamo la dimostrazione precedente, "congelando" stavolta la variabile x
- consideriamo quindi la funzione $\qquad k(y) = f(x_0, y)$
- come prima, tale funzione è derivabile in y_0 e vale

$$k'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- usando che y_0 è punto di minimo per k nell'intervallo $(y_0 - R, y_0 + R)$, si conclude come prima
- *scrivere i dettagli mancanti come esercizio per casa*

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$

Si dice che $\mathbf{x}_0 \in A$ è **punto critico di** f se

- f è derivabile in $\mathbf{x}_0$
- vale $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

Osservazione

Il *Teorema di Fermat* ci dice che eventuali punti di massimo o minimo locale **su un aperto** per una funzione derivabile f di più variabili, sono da ricercare tra i suoi punti critici

Esercizio

Determinare i punti critici della funzione di 2 variabili

$$f(x,y) = x^3 + x\,y + y^3$$

Soluzione

- Osserviamo che la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed ivi derivabile
- dobbiamo trovare tutti i punti (x,y) tali che

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

- in altre parole, dobbiamo trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

- dal momento che $f(x,y) = x^3 + x\,y + y^3$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3\,x^2 + y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 3\,y^2$$

- dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3\,x^2 + y & = & 0 \\ x + 3\,y^2 & = & 0 \end{cases}$$

- per risolvere questo sistema, usiamo la prima equazione per trovare $y = -3\,x^2$
- sostituiamo nella seconda

- arriviamo a

$$\begin{cases} y = -3\,x^2 \\ x + 3\,(-3\,x^2)^2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} y = -3\,x^2 \\ x + 27\,x^4 = 0 \end{cases}$$

- la seconda equazione può essere riscritta come

$$x\,(1 + 27\,x^3) = 0$$

- quindi otteniamo le soluzioni possibili

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad x = -\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

- sostituendo queste due possibilità nella prima equazione $\boxed{y = -3\,x^2}$, si trova

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = -3\,(0)^2 = 0$$

oppure

$$x = -\frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = -3\,\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}$$

- in conclusione, abbiamo ottenuto che

$$P_1 = (0, 0) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

sono gli unici punti critici della funzione f

Esercizio

Determinare i punti critici della funzione di 3 variabili

$$g(x, y, z) = (x^2 + (y-1)^2)\cos z$$

Soluzione

- La funzione g è definita su tutto $\mathbb{R}^3$ ed ivi derivabile
- dobbiamo trovare tutti i punti (x, y, z) tali che

$$\nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

- in altre parole, dobbiamo trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

- dal momento che $g(x,y,z) = (x^2 + (y-1)^2)\cos z$, si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2\,x\,\cos z$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 2\,(y-1)\,\cos z$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = -(x^2 + (y-1)^2)\,\sin z$$

- dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\,x\,\cos z & = & 0 \\ 2\,(y-1)\,\cos z & = & 0 \\ (x^2 + (y-1)^2)\,\sin z & = & 0 \end{cases}$$

- la prima equazione ci dice che abbiamo due possibilità

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \cos z$$

- il sistema iniziale, si scinde quindi nei due sistemi

$$\begin{cases} x &= 0 \\ 2\,(y-1)\,\cos z &= 0 \\ (\cancel{x^2} + (y-1)^2)\,\sin z &= 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \cos z &= 0 \\ \cancel{2\,(y-1)\,\cos z} &= 0 \\ (x^2 + (y-1)^2)\,\sin z &= 0 \end{cases}$$

(dovremo poi prendere l'unione delle soluzioni dei due)

- ovvero, abbiamo i due sistemi

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 2\,(y-1)\,\cos z & = & 0 \\ (y-1)^2\,\sin z & = & 0 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{ccc} \cos z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ (x^2+(y-1)^2)\,\sin z & = & 0 \end{array}\right.$$

- nel primo sistema, dalla seconda equazione abbiamo che

$$y = 1 \qquad \text{oppure} \qquad \cos z = 0$$

- dal momento che la possibilità $\cos z = 0$ è già contemplata dal secondo sistema, dal primo sistema otteniamo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ \cancel{(y-1)^2\,\sin z} & = & 0 \end{array}\right.$$

- la terza equazione è soddisfatta per ogni $z \in \mathbb{R}$! Quindi in conclusione dal primo sistema abbiamo che tutti i punti

$$P = (0, 1, z), \qquad \text{con } z \in \mathbb{R},$$

  sono punti critici per g!

- non abbiamo ancora finito: resta il secondo sistema

$$\begin{cases} \cos z & = & 0 \\ (x^2 + (y-1)^2) \sin z & = & 0 \end{cases}$$

- basta osservare che se $\cos z = 0$, allora $\sin z = 1$ oppure $\sin z = -1$. In ogni caso, $\sin z \neq 0$
- la seconda equazione ci da quindi

$$x^2 + (y-1)^2 = 0$$

- essendo una somma di quadrati, questa sarà nulla se e solo se

$$x^2 = 0 = (y-1)^2 \qquad \text{ovvero} \qquad x = 0, y = 1$$

- troviamo quindi delle soluzioni che abbiamo già trovato dall'altro sistema
- in definitiva, l'insieme dei punti critici di g è dato da

$$\Big\{(0, 1, z) \ : \ z \in \mathbb{R}\Big\}$$

Esercizio (per casa)

Trovare i punti critici delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = x^3 + 2\,x\,y + 2\,y^3, \qquad g(x,y) = e^{x-y} - x + y$$

$$h(x,y,z) = x^3 + x\,y + y^3 + y\,z + z^3$$

Esercizio (per casa)

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tali che* $a\,c \neq b^2$. *Provare che la funzione*

$$f(x,y) = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2$$

ha $(0,0)$ *come unico punto critico.*

III.3 Piano tangente e differenziabilità

Ricordiamo da ANALISI MATEMATICA A il seguente importante risultato

MEMO 4 (Teorema "Derivata VS. Tangente")

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in (a, b)$

f *ammette retta tangente al suo grafico in* $(x_0, f(x_0)) \iff f$ *è derivabile in* x_0

In tal caso, si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + o\big((x - x_0)\big), \qquad \text{per } x \to x_0,$$

e

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0),$$

è la retta tangente al grafico di f *nel punto* $(x_0, f(x_0))$

- Passiamo adesso al caso di funzioni di più variabili
- per semplicità, ci limiteremo al caso di $N = 2$ variabili
- in questo caso, piuttosto che di retta tangente, dovremo parlare di **piano tangente**(si ricordi che il grafico di una funzione di due variabili si può pensare come un "lenzuolo bidimensionale" immerso nello spazio tridimensionale)

Obiettivo

Vogliamo quindi definire il piano tangente al grafico di $f(x, y)$ e capire che legame ha con la derivabilità di f

Per fare questo, ci serve innanzitutto fare un richiamo da GEOMETRIA E ALGEBRA

Equazione di un piano

- Ricaviamo la forma generale di un piano in $\mathbb{R}^3$ passante da un punto assegnato (x_0, y_0, z_0), non contenente rette "verticali" (ovvero parallele all'asse z)
- Il piano risulta individuato in modo univoco una volta che, oltre al punto di passaggio, si diano due vettori non allineati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ che lo generano
- Senza perdita di generalità, possiamo prendere

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Tutti i punti (x, y, z) del piano corrispondente, sono tali che

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \text{“spazio vettoriale generato da } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w}''$$

ovvero ognuno di questi punti può scriversi come

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w}$$

per qualche $t, s \in \mathbb{R}$

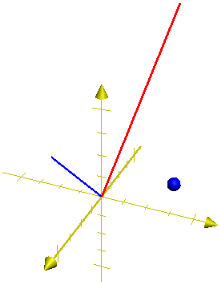

Figura: I due vettori **v** (in blu) e **w** (in rosso), col punto assegnato (x_0, y_0, z_0)

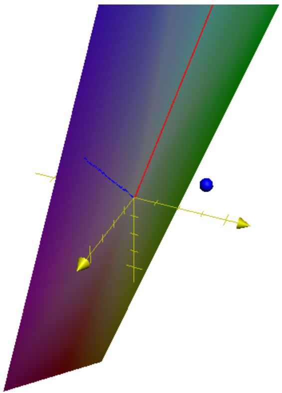

Figura: Il piano passante dall'origine, generato da tutte le combinazioni lineari di **v** e **w**

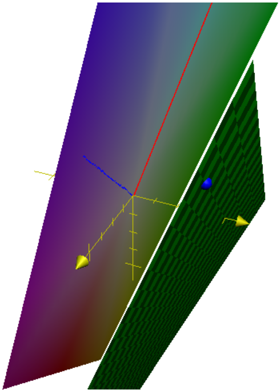

Figura: ...trasliamo questo piano del vettore (x_0, y_0, z_0), in modo che passi dal punto assegnato

- torniamo all'equazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ s \\ \alpha\,t + \beta\,s \end{bmatrix}$$

per $t, s \in \mathbb{R}$

- questa rappresenta l'equazione parametrica del piano
- per trovare l'equazione cartesiana, basta osservare che dalle prime due coordinate abbiamo

$$t = x - x_0 \qquad \text{e} \qquad s = y - y_0$$

e sostituendo nella terza coordinata

$$\boxed{z = z_0 + \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0)}$$

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $(x_0, y_0) \in A$

Si dice che

$$z = f(x_0, y_0) + \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0)$$

è l'**equazione del piano tangente al grafico di f nel punto** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se vale la seguente <u>identità asintotica</u>

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0, y_0) + \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) \\ & + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right), \quad \text{per } (x,y) \to (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Commento

Il piano tangente è il piano che approssima i valori di f vicino a (x_0, y_0), a meno di **un errore** che è trascurabile rispetto alla distanza di (x, y) dal punto scelto (x_0, y_0)

Definizione

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ che ammette piano tangente al suo grafico nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ si dice **differenziabile in** (x_0, y_0)

Teorema "Diff-Prop"

Sia f differenziabile in (x_0, y_0). Allora valgono i seguenti fatti:

1. *f è continua in (x_0, y_0);*
2. *f è derivabile in (x_0, y_0);*
3. *se*

$$z = f(x_0, y_0) + \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0)$$

è l'equazione del piano tangente, allora

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad e \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Dimostrazione

1. Dimostriamo che f è continua in (x_0, y_0)
    - per definizione di funzione differenziabile, esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = & f(x_0,y_0) + \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) \\
& + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right), \quad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

    - abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= f(x_0,y_0) \\
&\quad + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\alpha\,(x-x_0) + \beta\,(y-y_0)\right] \\
&\quad + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \\
&= f(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

    - ...ovvero f è continua in (x_0, y_0)

2. Dimostriamo che f è derivabile in (x_0, y_0)
   - dobbiamo dimostrare che esistono finiti i due limiti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad \text{e} \quad \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

   - usando la definizione di funzione differenziabile, si ha per $x \to x_0$ e $y = y_0$

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\alpha\,(x - x_0) + \beta\,\cancel{(y_0 - y_0)}}{x - x_0} + \frac{o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + \cancel{(y_0 - y_0)^2}}\right)}{x - x_0},$$

   - ovvero per $x \to x_0$ e $y = y_0$

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\alpha\,(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{o(|x - x_0|)}{x - x_0}$$

- dalla definizione di $o-$piccolo, si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(|x - x_0|)}{x - x_0} = 0$$

- abbiamo allora che il limite del rapporto incrementale esiste finito e vale

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{\alpha \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} + \frac{o(|x - x_0|)}{x - x_0} \right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

- procedendo in modo del tutto simile, si dimostri *per esercizio* che f è derivabile anche rispetto ad y e vale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \beta$$

3. infine, il legame tra i coefficienti α e β dell'equazione del piano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + \alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0),$$

e le derivate parziali di f, viene direttamente dal punto precedente

- Infatti, abbiamo appena mostrato che

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- questo conclude la dimostrazione

Osservazione importante

Dal risultato precedente, otteniamo che se f è differenziabile, l'equazione del piano tangente è data da

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0),$$

ovvero, in forma compatta

$$z = f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \left[\begin{array}{c} x - x_0 \\ y - y_0 \end{array} \right] \right\rangle$$

Usando le notazioni per i vettori, possiamo ulteriormente compattare la scrittura in

$$\boxed{z = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle}$$

Domanda

Nella pratica, come si fa a sapere quando una funzione è differenziabile e possiamo quindi approssimarla tramite il suo piano tangente?

Una condizione sufficiente è data dal seguente

Teorema (del differenziale totale)

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 su A, ovvero una funzione continua, derivabile e le cui derivate parziali siano a loro volta continue

Allora f è differenziabile in ogni punto $(x_0, y_0) \in A$

- Sia $(x_0, y_0) \in A$, dobbiamo dimostrare che f ammette piano tangente al suo grafico nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
- ovvero, che vale l'identità asintotica

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) \\ + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right), \quad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0)$$

- dal momento che A è aperto, esiste una palla $B_R((x_0, y_0)) \subset A$
- prendiamo adesso un punto $(x, y) \in B_R(x_0, y_0)$
- osserviamo che si ha anche

$$(x_0, y) \in B_R((x_0, y_0)) \subset A$$

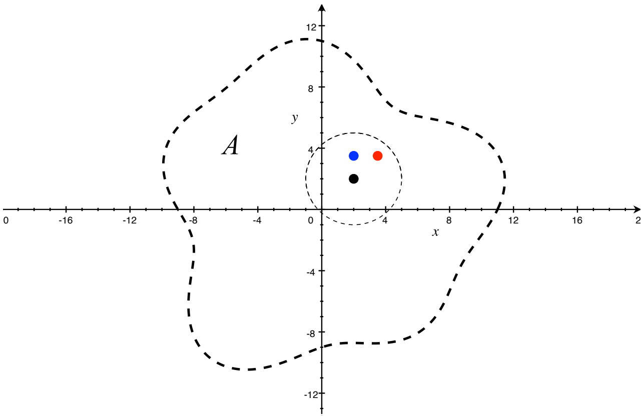

Figura: La configurazione geometrica della dimostrazione: in nero, il punto "base" (x_0, y_0); in rosso, il generico punto (x, y) della palla $B_R((x_0, y_0))$. Il punto blu corrisponde al punto "intermedio" (x_0, y)

- adesso “congeliamo” la variabile y e sfruttiamo il *Teorema di Lagrange* per la funzione di una variabile

$$x \mapsto f(x, y)$$

- abbiamo allora che esiste un punto $\overline{x}$ intermedio tra x_0 e x tale che

$$\boxed{f(x, y) = f(x_0, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y)\,(x - x_0)}$$

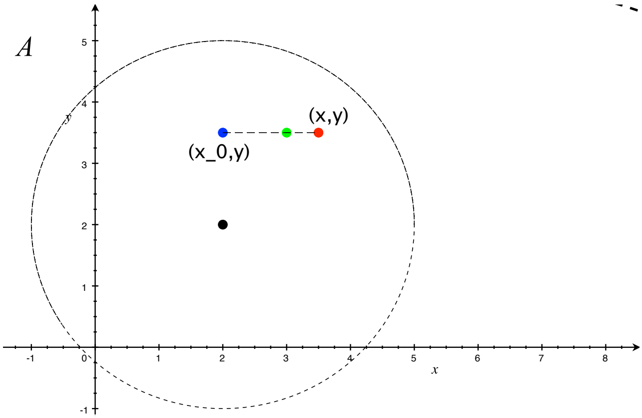

Figura: Facciamo uno zoom sulla palla $B_R((x_0, y_0))$: il punto verde è il punto $(\overline{x}, y)$ ottenuto applicando il *Teorema di Lagrange* alla funzione di una variabile $x \mapsto f(x, y)$, ottenuta "congelando" y

- invertiamo adesso il punto di vista: "congeliamo" la variabile x e sfruttiamo il *Teorema di Lagrange* per la funzione di una variabile

$$y \mapsto f(x_0, y)$$

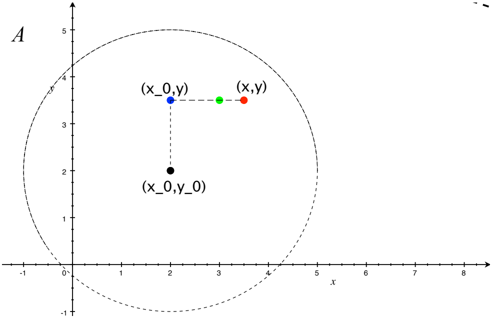

Figura: Vogliamo adesso "congelare" la prima variabile in x_0 e considerare $y \mapsto f(x_0, y)$

- abbiamo allora che esiste un punto $\overline{y}$ intermedio tra y_0 e y tale che

$$f(x_0, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y})\,(y - y_0)$$

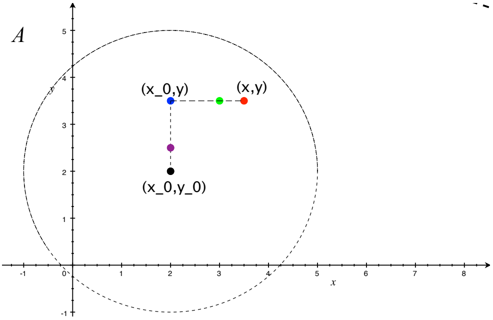

Figura: Il punto viola corrisponde al punto intermedio $(x_0, \overline{y})$ appena ottenuto

- inseriamo adesso questa informazione nella formula di prima

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y)\,(x-x_0)}$$

- abbiamo

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y)\,(x-x_0) \\ &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\overline{y})\,(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y)\,(x-x_0) \end{aligned}$$

- questa formula è **quasi** quella che vogliamo

- quanto siamo lontani dalla conclusione?
- volevamo dimostrare

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$
$$+\, o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right), \quad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0)$$

- ...per ora abbiamo ottenuto

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y)}\,(x-x_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\overline{y})}\,(y-y_0)$$

con $\quad \overline{x} \in [x_0, x] \quad$ e $\quad \overline{y} \in [y_0, y]$

- dobbiamo ancora sfruttare la continuità delle derivate parziali!

- se $(x, y) \to (x_0, y_0)$, allora di conseguenza anche $\overline{x} \to x_0$
- per continuità si avrà

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

- possiamo anche riscriverla come l'identità asintotica

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1), \qquad \text{per } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

- in modo simile a quanto appena fatto, sempre per continuità, possiamo dire che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \overline{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1), \qquad \text{se } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

- sostituiamo queste identità nella formula che avevamo ottenuto
- si ottiene allora per $(x, y) \to (x_0, y_0)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y)}\,(x-x_0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})}\,(y-y_0)$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + o\big((x-x_0)\big)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + o\big((y-y_0)\big)$$

- abbiamo usato che (dalla definizione di $o-$piccolo!)

$$o(1)\,(x-x_0) = o\big((x-x_0)\big), \qquad \text{per } x \to x_0$$

- per concludere, non resta che osservare (*provarla per casa!*)

$$o\big((x-x_0)\big) + o\big((y-y_0)\big) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0^2)}\right)$$

per $(x, y) \to (x_0, y_0)$

Esercizio

Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = \arctan(x\,y)$$

nel punto $(1, 1, \pi/4)$

Soluzione

- Dobbiamo innanzitutto dimostrare che la funzione in esame ammette piano tangente
- ovvero dobbiamo dimostrare che f è differenziabile in $(1, 1)$
- osserviamo che f è derivabile e le sue derivate parziali sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x\,y)^2}\,y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x\,y)^2}\,x$$

- le due derivate parziali sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$ (osserviamo che il denominatore non si annulla mai)
- abbiamo quindi che f è C^1 su $\mathbb{R}^2$
- per il *Teorema del differenziale totale*, sappiamo allora che f **è differenziabile** su tutto $\mathbb{R}^2$
- l'equazione del piano tangente, si calcola tramite la formula

$$\boxed{z = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle}$$

- dove $\mathbf{x_0} = (1,1)$, $f(\mathbf{x}_0) = \arctan(1) = \pi/4$ e

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{1}{1+(x\,y)^2}\, y, \frac{1}{1+(x\,y)^2}\, x \right)_{|x=y=1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

- abbiamo dunque

$$\begin{aligned} z &= f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \frac{\pi}{4} + \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), (x-1, y-1) \right\rangle \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

- ovvero

$$z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} - 1$$

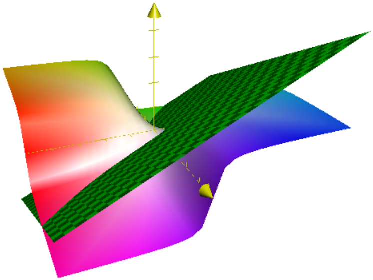

Figura: Il grafico di $f(x,y) = \arctan(x\,y)$ e del piano tangente nel punto $(1,1,\pi/4)$.

Ricapitolando

Per una funzione di più variabili

- $C^1 \quad \Longrightarrow \quad$ differenziabile
- differenziabile $\quad \Longrightarrow \quad$ continua e derivabile
- derivabile $\quad \not\Longrightarrow \quad$ continua

Si noti in particolare che la *derivabilità* è **condizione necessaria ma non sufficiente** per avere la *differenziabilità*

Esempio

Consideriamo la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Tale funzione è derivabile in $(0,0)$, dal momento che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

ed anche

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

- d'altra parte f non può essere differenziabile in $(0,0)$
- se lo fosse, f dovrebbe essere continua in $(0,0)$
- ma abbiamo già visto (esercizio della *Lezione 6*) che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$$

- quindi f non è continua in $(0,0)$ e, di conseguenza, nemmeno differenziabile in $(0,0)$