Analisi Matematica B
– *Lezione 9* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 31 Marzo 2020

Esercizio importante

La funzione "modulo" ovvero

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*, ma* **non** *nell'origine*

Soluzione

- Abbiamo già visto in una lezione precedente che tale funzione è derivabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e **non derivabile** in $\{(0,0)\}$
- per il *Teorema Diff-Prop* non può nemmeno essere differenziabile in $(0,0)$
- ci resta da dimostrare che h è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- ci basta osservare che le sue derivate parziali (calcolate in precedenza)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

  sono funzioni continue sull'insieme aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- per il *Teorema del differenziale totale* otteniamo la conclusione

La non differenziabilità del modulo nell'origine si poteva immaginare, ricordando come è fatto il suo grafico

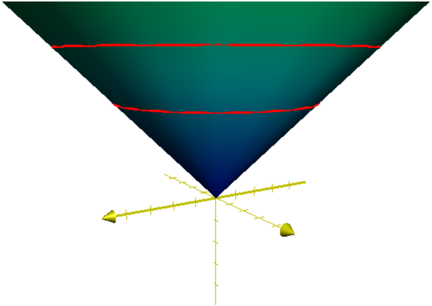

Figura: Nell'origine, il grafico ha un "punto angoloso", quindi il piano tangente non può essere ivi definito

Esercizio "Diff-radiale"

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione radialmente simmetrica, avente funzione generatrice* $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$*. Si dimostri che*

$$f \text{ è differenziabile in } (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi'(0) = 0$$

Soluzione

Ricordiamo intanto che

"f radialmente simmetrica, con funzione generatrice φ"

vuol dire che

$$f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$$

- partiamo dall'implicazione

$$f \text{ è differenziabile in } (0,0) \qquad \Longleftarrow \qquad \varphi'(0) = 0$$

- dal *Teorema "Derivata VS. Tangente"* per la funzione di una variabile φ, si ha

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, t + o(t), \qquad \text{per } t \to 0^+$$

- dal momento che $\varphi'(0) = 0$ per ipotesi, allora

$$\varphi(t) = \varphi(0) + o(t), \qquad \text{per } t \to 0^+$$

- scegliendo $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $(x, y) \to (0, 0)$, si ha allora

$$\begin{aligned} f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) &= \varphi(0) + o(\sqrt{x^2+y^2}) \\ &= f(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2}) \end{aligned}$$

- in altre parole, abbiamo

$$f(x,y) = f(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2}), \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

- in base alla definizione f è differenziabile in $(0,0)$, con piano tangente (orizzontale!) dato da

$$z = f(0,0)$$

- in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

in base al *Teorema "Diff-Prop"*

- dimostriamo adesso l'implicazione inversa

$$f \text{ è differenziabile in } (0,0) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(0) = 0$$

- per ipotesi, sappiamo che vale l'identità asintotica

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y \\ + o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0) \end{aligned}$$

- usando che f è radialmente simmetrica, possiamo riscrivere questa come

$$\begin{aligned} \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) = \varphi(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y \\ + o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0) \end{aligned}$$

- scegliendo in questa identità $x \to 0^+$ e $y = 0$, si ha

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x + o\big(x\big) \qquad \text{per } x \to 0^+$$

- questo dimostra che φ è derivabile in 0 e

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{o(x)}{x} \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \end{aligned}$$

- d'altronde, se ripartiamo dall'identità

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) = \varphi(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y + o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \qquad \text{per } (x,y)\to(0,0)$$

- e scegliamo adesso $x=0$ e $y\to 0^+$, si ha

$$\varphi(y) = \varphi(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y + o\big(y\big) \qquad \text{per } y\to 0^+$$

- questo dimostra che vale anche

$$\varphi'(0) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y} = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{o(y)}{y}\right] = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

- possiamo allora riscrivere l'identità

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) = \varphi(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y$$
$$+\,o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \qquad \text{per } (x,y)\to(0,0)$$

come

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,(x+y)$$
$$+\,o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) \qquad \text{per } (x,y)\to(0,0)$$

- d'altra parte dal *Teorema "Derivata VS. Tangente"* per la funzione di una variabile φ, abbiamo visto che possiamo scrivere

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,\sqrt{x^2+y^2} + o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

per $(x,y)\to(0,0)$

- confrontando le due espressioni, troviamo che deve aversi

$$\varphi'(0)\,(x+y) = \varphi'(0)\,\sqrt{x^2+y^2},$$

- se fosse $\varphi'(0) \neq 0$ otterremmo l'identità

$$x+y = \sqrt{x^2+y^2}$$

  che è **falsa!!** in generale

- ne concludiamo quindi (finalmente!), che deve valere $\varphi'(0) = 0$

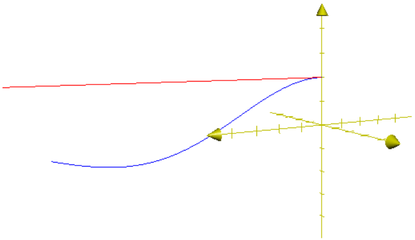

Figura: In grafico di una funzione generatrice φ, avente retta tangente orizzontale in 0...

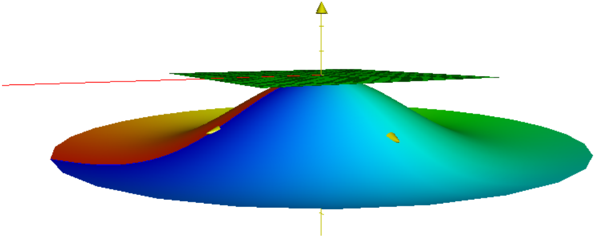

Figura: ...ruotando il grafico, si ottiene il grafico della funzione radialmente simmetrica simmetrica, il cui piano tangente nell'origine è orizzontale

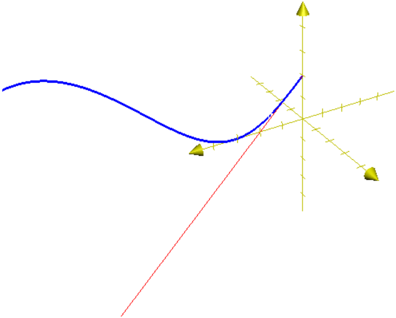

Figura: In grafico di una funzione generatrice φ, avente retta tangente NON orizzontale in 0...

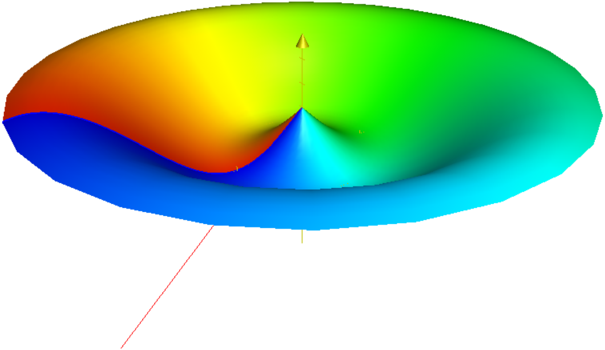

Figura: ...ruotando il grafico, si ottiene il grafico della funzione radialmente simmetrica simmetrica, che ha una cuspide nell'origine! Niente piano tangente, quindi

III.4 Conseguenze della differenziabilità

Osservazione preliminare

Tutte le definizioni ed i risultati visti nella sezione precedente si generalizzano a funzioni di N variabili, ovvero...

Equazione iperpiano tangente al grafico

$$x_{N+1} = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

Funzione differenziabile

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

se $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$

Inoltre

- vale ancora il *Teorema Diff-Prop*
- vale ancora il *Teorema del differenziale totale*

Teorema "Derivata di funzione composta"

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *differenziabile nel punto* $\mathbf{x}_0 \in A$

Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabile nel punto* $f(\mathbf{x}_0)$

Allora la funzione composta $\psi \circ f : A \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in* $\mathbf{x}_0$ *e vale*

$$\nabla \psi \circ f(\mathbf{x}_0) = \psi'(f(\mathbf{x}_0))\, \nabla f(\mathbf{x}_0)$$

Dimostrazione

- Dal momento che f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$, sappiamo che f è anche continua in $\mathbf{x}_0$ (per il *Teorema Diff-Prop*)
- quindi $f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}_0)$ se $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$

- per la funzione di una variabile ψ, dal *Teorema "Derivata VS. Tangente"* abbiamo che vale

$$\psi(t) = \psi(t_0) + \psi'(t_0)\,(t - t_0) + o((t - t_0)), \qquad \text{se } t \to t_0,$$

- usando questa formula con $t = f(\mathbf{x})$ e $t_0 = f(\mathbf{x}_0)$, si ha

$$\begin{aligned}\psi(f(\mathbf{x})) = \psi(f(\mathbf{x}_0)) &+ \psi'(f(\mathbf{x}_0))\,(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) \\ &+ o\big((f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))\big), \qquad \text{se } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

- usiamo adesso la differenziabilità di f per scrivere

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\rangle \\ + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|), \qquad \text{se } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

- sostituendo questa identità nella formula precedente ed osservando che $\boxed{o\big((f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))\big) = o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}$

- si ottiene infine

$$\psi(f(\mathbf{x})) = \psi(f(\mathbf{x}_0)) + \psi'(f(\mathbf{x}_0))\,\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\rangle \\ + o\big(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\big), \qquad \text{se } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$$

- che possiamo anche riscrivere come

$$\psi(f(\mathbf{x})) = \psi(f(\mathbf{x}_0)) + \langle \psi'(f(\mathbf{x}_0))\,\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\rangle \\ + o\big(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\big), \qquad \text{se } \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$$

- in base alla definizione, questo dimostra che $\psi \circ f$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$
- dal *Teorema Diff-Prop* possiamo inoltre concluderne che

$$\nabla \psi \circ f(\mathbf{x}_0) = \psi'(f(\mathbf{x}_0))\,\nabla f(\mathbf{x}_0)$$

- la dimostrazione è conclusa

Esercizio

Si dica in quali punti risultano differenziabili e si calcoli il gradiente delle seguenti *<u>funzioni radialmente simmetriche</u>*

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) \qquad g(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Soluzione

- Partiamo dalla funzione f, la cui funzione generatrice è

$$\varphi(t) = \log t^2$$

- possiamo quindi scrivere

$$f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$$

- questa funzione è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- ricordando che

$$\varphi(t) = \log t^2 \qquad \text{è derivabile su } (0, +\infty)$$

con derivata

$$\varphi'(t) = \frac{2}{t}$$

- e che

$$\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{è differenziabile su } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

con gradiente

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

- dal *Teorema "Derivata di funzione composta"* si ottiene che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e vale

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \varphi'(\sqrt{x^2+y^2}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= \left(\frac{2\,x}{x^2+y^2}, \frac{2\,y}{x^2+y^2} \right)\end{aligned}$$

- vediamo adesso alla funzione g, la cui funzione generatrice è

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2}$$

- possiamo quindi scrivere

$$g(x, y, z) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

- questa funzione è definita su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$
- ricordando che

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2} \qquad \text{è derivabile su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

con derivata

$$\varphi'(t) = -\frac{2}{t^3}$$

- e che

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{è differenziabile su } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

con gradiente

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

- dal *Teorema "Derivata di funzione composta"* si ottiene che g è differenziabile su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ e vale

$$\begin{aligned} \nabla g(x,y,z) &= \varphi'(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ &\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \\ &= -\frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,(x,y,z) \end{aligned}$$

Teorema "Derivata curvilinea"

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$

Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva di classe C^1, tale che $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$ per un certo $t_0 \in (a, b)$

Allora la funzione di una variabile "restrizione di f alla curva γ"

$$h(t) = f(\gamma(t))$$

è derivabile in t_0 e vale

$$h'(t_0) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle$$

Osservazione

Questo risultato avrà una grande importanza a livello teorico nel seguito

Dimostrazione

- Dobbiamo intanto mostrare che esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

- usando la differenziabilità di f ed il fatto che

$$\lim_{t \to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$$

si ha

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) = f(\gamma(t_0)) + \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle \\ + o\big(|\gamma(t) - \gamma(t_0)|\big), \qquad \text{se } t \to t_0 \end{aligned}$$

- abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} &= \lim_{t\to t_0} \left\langle \nabla f(\gamma(t_0)), \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\rangle \\
&\quad + \lim_{t\to t_0} \frac{o\big(|\gamma(t) - \gamma(t_0)|\big)}{t - t_0} \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle \\
&\quad + \lim_{t\to t_0} \frac{o\big(|\gamma(t) - \gamma(t_0)|\big)}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} \, \frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{t - t_0}
\end{aligned}
$$

- ovvero

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t\to t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} \\
&= \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle
\end{aligned}
$$

Esercizio

Sia $f(x,y) = x\,y$ *e si consideri la curva regolare*

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Si calcoli la derivata della restrizione di f *alla curva* γ

Soluzione

Ricordando che

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \qquad \text{e} \qquad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

si ha per il Teorema precedente

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$= \cos^2 t - \sin^2 t$$

Tiriamo adesso fuori dalla soffitta il "problema modello" di massimizzazione/minimizzazione, in un caso particolare

Esercizio (vedi *Lezione 7*)

Si determinino

$$\max \Big\{ x\,y \;:\; x^2 + y^2 \leq 1 \Big\}$$

ed i corrispondenti punti di massimo.

Soluzione

- Non abbiamo ancora tutta la teoria necessaria per fare una trattazione sistematica di questi problemi, ma possiamo fare qualcosa di "artigianale", che sfrutta quanto fatto fin'ora
- intanto ricordiamo che il massimo esiste, grazie al *Teorema di Weierstrass*

- Dividiamo adesso il **vincolo** del nostro problema

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$$

nel suo interno

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < 1\Big\} \qquad \textbf{aperto}$$

e la sua frontiera

$$\partial A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\Big\} \qquad \textbf{chiuso}$$

- si ricordi che il fatto che A sia aperto è conseguenza delle proprietà delle funzioni continue, viste nella *Lezione 7*
- stesso commento per l'insieme di livello ∂A

- analizziamo adesso separatamente il problema della ricerca del massimo su

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\right\}$$

e su

$$\partial A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

- "perché facciamo questo?"
- perché A è **aperto**, quindi possiamo usare il *Teorema di Fermat* e dire che se $f(x, y) = x\,y$ avesse un punto di massimo proprio in A, esso <u>deve essere un punto critico</u> di f!
- in altre parole, se troviamo tutti i punti critici di f che appartengono ad A, abbiamo dei **candidati punti di massimo**

- prima di procedere, si ricordi che i punti critici che troviamo sono **possibili punti di massimo**, ma non è detto che lo siano davvero!
- troviamo i punti critici di f: ossevando che

$$\nabla f(x,y) = (y,x)$$

si vede che

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

- quindi $(0,0)$, che appartiene ad A, è l'unico punto critico di f
- mettiamolo da parte per il momento: dopo cercheremo di capire se è di massimo, di minimo....o nessuno dei due!

- ci manca da analizzare la situazione sulla frontiera ∂A

$$\partial A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

- questo insieme **non è un aperto**, quindi NON possiamo usare il *Teorema di Fermat*, per trovare eventuali candidati punti di massimo
- possiamo però studiare f su ∂A osservando che ∂A coincide col sostegno della curva regolare

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\,\pi]$$

- allora, studiare f su ∂A è come studiare la funzione composta

$$f(\gamma(t)) = \cos t \, \sin t, \qquad t \in [0, 2\,\pi]$$

- in definitiva, per studiare f su ∂A, ci siamo a ridotti...a studiare la funzione di una variabile!

$$t \mapsto \cos t\, \sin t = \frac{1}{2}\, \sin(2\,t), \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi]$$

- il massimo di questa funzione è $1/2$, assunto per

$$t = \frac{\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{5}{4}\,\pi$$

- torniamo alla nostra situazione bidimensionale, abbiamo che il massimo di f su ∂A è

$$\frac{1}{2}$$

assunto in corrispondenza dei punti della frontiera

$$P_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P_2 = \left(\cos\left(\frac{5}{4}\,\pi\right), \sin\left(\frac{5}{4}\,\pi\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- **conclusione:**
  1. sulla frontiera
  $$\partial A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\Big\}$$
  la funzione assume massimo uguale a $1/2$
  2. sull'interno
  $$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\Big\}$$
  l'unico eventuale punto di massimo, sarebbe il punto critico $(0, 0)$, ma
  $$f(0, 0) = 0 \cdot 0 = 0$$
- abbiamo allora
  $$\max\Big\{x\,y \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\Big\} = \frac{1}{2}$$
  e $P_1, P_2 \in \partial A$ sono gli unici due punti di massimo!

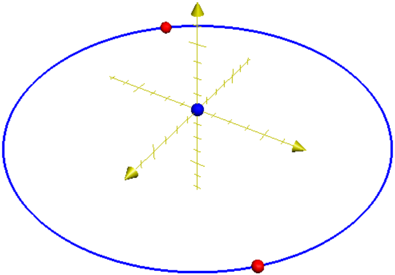

Figura: Il cerchio blu delimita il “vincolo” del problema precedente. In blu, il punto critico $(0, 0)$ all’interno; in rosso, i due punti di massimo.

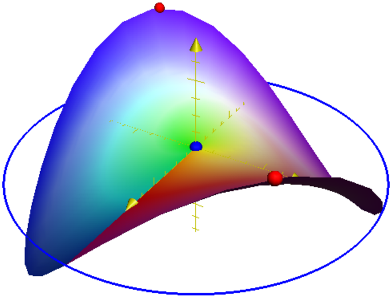

Figura: Il grafico di $f(x,y) = x\,y$ in corrispondeza del vincolo. In rosso, il valore del massimo; in blu, il valore assunto in corrispondenza del punto critico $(0,0)$ (che non è ne' di massimo ne' di minimo).

Esercizio (per casa)

Si determinino

$$\min\left\{x^2 - y^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ed i corrispondenti punti di minimo.

Esercizio (per casa)

Si determinino

$$\max\left\{x^4 + y^4 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ed i corrispondenti punti di massimo.

Torniamo adesso alle *derivate direzionali*, che avevamo definito qualche lezione fa...

Se $\mathbf{x}_0 \in A$, si definisce **derivata di f in $\mathbf{x}_0$ lungo la direzione $\mathbf{v}$** come

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

Per una funzione differenziabile, non c'è bisogno di calcolarsi questo limite

Teorema "Formula del gradiente"

Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in A$

Per ogni direzione $\mathbf{v}$ la derivata direzionale si può calcolare tramite

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle$$

Dimostrazione

- Utilizzando la definizione di funzione differenziabile, si ha

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) - \mathbf{x}_0 \rangle \\ + o(|(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) - \mathbf{x}_0|), \qquad \text{se } h \to 0 \end{aligned}$$

- ovvero, ricordando che $|\mathbf{v}| = 1$

$$f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}) \rangle\, h + o(|h|), \qquad \text{se } h \to 0$$

- abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} &= \frac{\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}) \rangle\, h + o(|h|)}{h} \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle + \frac{o(|h|)}{h}, \quad \text{se } h \to 0 \end{aligned}$$

- passando al limite, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\,\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}\rangle + \lim_{h\to 0} \frac{o(|h|)}{h} = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}\rangle$$

- proprio come volevamo!

Esercizio

Data la direzione

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

e la funzione

$$f(x, y) = \arctan(x\, y)$$

si calcoli la derivata di f *in* $(0, 1)$ *rispetto alla direzione* $\mathbf{v}$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 1)$$

Soluzione

- Se possiamo, cerchiamo di usare la "formula del gradiente"
- per questo, mostriamo che f è differenziabile nel punto $(0, 1)$

- $t \mapsto \arctan t$ è derivabile su $\mathbb{R}$, quindi f è derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$
- inoltre vale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1 + x^2\, y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1 + x^2\, y^2}$$

- queste derivate parziali sono continue su $\mathbb{R}^2$
- f è una funzione C^1 su $\mathbb{R}^2$, quindi differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ (grazie al *Teorema del differenziale totale*)
- possiamo allora applicare la "*formula del gradiente*"

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,1) = \langle \nabla f((0,1)), \mathbf{v} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

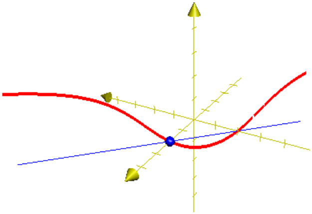

Figura: Il grafico delle funzione $f(x, y) = \arctan(x\,y)$, ristretta alla retta passante dal punto $(0, 1)$, avente direzione $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

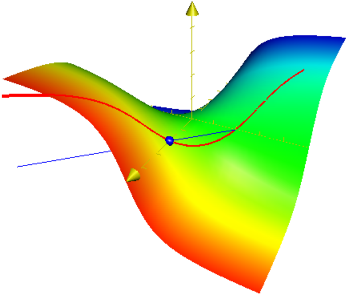

Figura: Il grafico completo della funzione f

Importante 1

- La "*formula del gradiente*" ci permette di dare un'interpretazione "geometrica" del vettore gradiente ∇f
- Abbiamo visto che per una funzione differenziabile
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle$$
- ricordando la definizione di derivata direzionale, essa rappresenta il tasso di crescità di f nel punto $\mathbf{x}_0$, lungo la direzione $\mathbf{v}$
- in base alla *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (vedi *Lezione 1*)
$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle \leq |\nabla f(\mathbf{x}_0)| \, |\mathbf{v}| = |\nabla f(\mathbf{x}_0)|$$

  perché (ricorda!) $\mathbf{v}$ è un versore

- inoltre, si può vedere che vale l'uguaglianza

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle = |\nabla f(\mathbf{x}_0)|$$

  se e soltanto se $\mathbf{v}$ ha gli stessi direzione e verso di $\nabla f(\mathbf{x}_0)$

- abbiamo quindi che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) \leq |\nabla f(\mathbf{x}_0)|$$

  e vale l'uguale se e solo se $\mathbf{v}$ è allineato con $\nabla f(\mathbf{x}_0)$

- in altre parole, il gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ci da la <u>direzione di massima crescita della funzione</u> f, nel punto $\mathbf{x}_0$

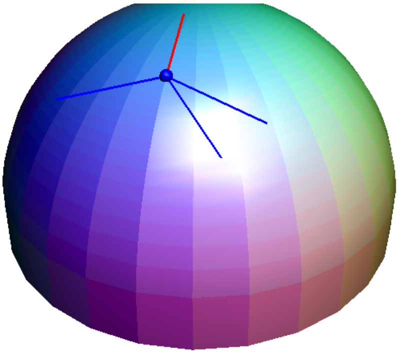

Figura: Il grafico di una funzione f: nel punto in evidenza, la direzione rossa indica la direzione di massima crescita, ovvero la direzione del gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Lungo le altre direzioni (in blu), la crescita è minore

Importante 2

Per una funzione differenziabile, il gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ è ortogonale all'insieme di livello

$$E_f(f(\mathbf{x}_0)) = \{\mathbf{x} \in A \,:\, f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$$

nel punto $\mathbf{x}_0$

Vediamolo in dimensione $N = 2$

- Supponiamo per semplicità che l'insieme di livello in questione sia il sostegno di una curva regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$
- Allora dalla definizione di insieme di livello vuol dire che

$$f(\gamma(t)) = f(\mathbf{x}_0), \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

ovvero f ristretta all'insieme di livello è costante

- derivando rispetto a t

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- ovvero, usando il *Teorema "Derivata curvilinea"* si ha

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- ricordando che $\gamma'(t)$ da la direzione tangente al sostegno della curva (e quindi all'insieme di livello), otteniamo che

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)$$

è ortogonale all'insieme di livello nel punto $\mathbf{x}_0$

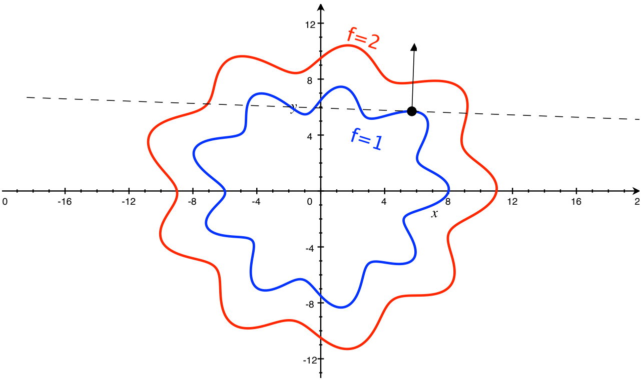

Figura: Due insiemi di livello per una funzione $f(x, y)$. Nel punto (x_0, y_0) evidenziato, il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ (freccia nera) è perpendicolare alla retta tangente all'insieme di livello passante da (x_0, y_0). Si noti la direzione in cui punta il gradiente: punta verso la direzione di "crescita" (cioè nella direzione dell'insieme di livello 2 nel disegno), dal momento che il gradiente deve darci la direzione di massima crescita.