Analisi Matematica B
– *Lezione 3* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 10 Marzo 2020

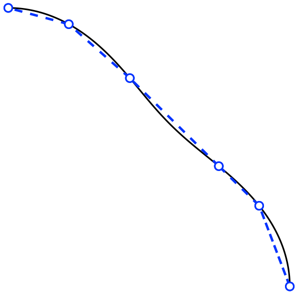


Figura: Connettiamo questi punti tramite segmenti e calcoliamo la lunghezza di questa spezzata (tratteggiata in blu)

L'idea è di prendere come definizione di lunghezza "la migliore possibile" tra queste approssimazioni

Più rigorosamente

Definizione

Si dice che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è **rettificabile** se la quantità

$$\ell(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \ : \ \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b]) \right\}$$

è finita.

La quantità $\ell(\gamma)$ si chiama **lunghezza** della curva γ

Ricorda

Il simbolo $\mathcal{P}([a, b])$ denota l'insieme delle partizioni dell'intervallo $[a, b]$

Osservazione

Prendendo la *partizione banale*

$$t_0 = a \qquad \text{e} \qquad t_1 = b,$$

dalla definizione di estremo superiore si ottiene sempre

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \ell(\gamma)$$

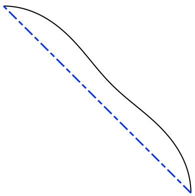


Figura: La lunghezza di γ è sempre maggiore o uguale alla lunghezza del segmento che unisce il punto finale $\gamma(b)$ ed il punto iniziale $\gamma(a)$ (tratteggiato in blu)

Ci servirà anche la seguente definizione più generale

Definizione

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ e sia $[c, d] \subset [a, b]$ un sottointervallo

Si definisce **lunghezza di γ relativamente al sottointervallo** $[c, d]$ la quantità

$$\ell(\gamma; [c, d]) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \ : \ \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([c, d]) \right\}$$

Esercizio per casa ("Decomposizione della lunghezza")

Per una curva rettificabile, vale

$$\ell(\gamma; [a, b]) = \ell(\gamma; [a, c]) + \ell(\gamma; [c, b]), \qquad \text{per ogni } a < c < b.$$

Verificare che una curva è rettificabile e calcolarne la lunghezza usando la definizione precedente può essere molto scomodo

Ci viene in aiuto la seguente **condizione sufficiente**

Teorema [di rettificabilità delle curve C^1]

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ C^1 *a tratti è rettificabile e vale*

$$\boxed{\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt} \tag{1}$$

Osservazione

Se t rappresenta il tempo, abbiamo che

$$\underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{velocità}} \times \underbrace{dt}_{\text{tempo}}$$

rappresenta lo spostamento infinitesimo. La formula (1) dice che la lunghezza si trova "sommando tutti gli spostamenti infinitesimi"

Dimostrazione

Per semplicità supponiamo che γ sia C^1, non solo C^1 a tratti

Divideremo la dimostrazione in due parti

1. **Prima parte**: "una curva C^1 è rettificabile"
2. **Seconda parte**: "formula per la lunghezza"

— Prima parte —

- γ è C^1, quindi la funzione

$$t \mapsto |\gamma'(t)|,$$

  è continua su $[a, b]$ e quindi integrabile secondo Riemann (vedi Analisi Matematica A)

- ugualmente, le componenti

$$t \mapsto \gamma_j'(t), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

  sono continue su $[a, b]$ e quindi integrabili

- prendiamo $[c, d] \subset [a, b]$ sottointervallo
- scegliamone una partizione $\{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([c, d])$
- dal *Teorema fondamentale del Calcolo Integrale*

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)\, dt$$

- prendendo il modulo

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)|\, dt$$

- sommando su $i = 0, \dots, n-1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)|\, dt = \int_c^d |\gamma'(t)|\, dt$$

- abbiamo ottenuto

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \le \int_c^d |\gamma'(t)|\, dt,$$

per ogni partizione di $[c, d]$

- prendendo l'estremo superiore su tutte queste partizioni

$$\sup_{\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([c,d])} \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \le \int_c^d |\gamma'(t)|\, dt$$

- ovvero, ricordando la definizione di lunghezza

$$\ell(\gamma; [c, d]) \le \int_c^d |\gamma'(t)|\, dt$$

- se prendo $[c, d] = [a, b]$, allora vale

$$\ell(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

e γ è quindi rettificabile (l'integrale sopra è finito!)

— Seconda parte —

- Abbiamo già dimostrato che γ è rettificabile e vale

$$\ell(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

- per concludere, dobbiamo dimostrare che vale anche

$$\ell(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

- introduciamo la funzione "lunghezza"

$$\psi(t) = \ell(\gamma; [a, t])$$

- vogliamo intanto dimostrare che ψ è derivabile

- osserviamo che (prendiamo per semplicità $h > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} &= \frac{\ell(\gamma;[a,t+h])-\ell(\gamma;[a,t])}{h}\\ &= \frac{\cancel{\ell(\gamma;[a,t])}+\ell(\gamma;[t,t+h])-\cancel{\ell(\gamma;[a,t])}}{h}\\ &= \frac{\ell(\gamma;[t,t+h])}{h}\end{aligned}$$

- nella seconda uguaglianza precedente, abbiamo usato l'esercizio "Decomposizione della lunghezza" (vedi sopra)
- ricordiamo adesso che

$$\frac{|\gamma(t+h)-\gamma(t)|}{h} \le \frac{\ell(\gamma;[t,t+h])}{h} = \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h},$$

grazie al fatto che "la lunghezza di una curva è sempre maggiore della distanza tra il punto iniziale e quello finale"

- d'altra parte, nella **Prima parte** abbiamo dimostrato che

$$\ell(\gamma;[c,d]) \le \int_c^d |\gamma'(t)|\,dt$$

per ogni sottointervallo $[c,d]$

- possiamo usare questa formula per il sotto intervallo $[t,t+h]$

$$\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} = \frac{\ell(\gamma;[t,t+h])}{h} \le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |\gamma'(\tau)|\,d\tau$$

- inoltre, usando la *Media integrale* (si veda "*Calcolo integrale per funzioni di una variabile*"), sappiamo che esiste $t_h \in [t,t+h]$ tale che

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |\gamma'(\tau)|\,d\tau = |\gamma'(t_h)|$$

- abbiamo dunque ottenuto

$$\frac{|\gamma(t+h)-\gamma(t)|}{h} \le \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} \le |\gamma'(t_h)| \qquad (2)$$

- le due quantità agli estremi di (2) ammettono limite

$$\lim_{h\to 0} |\gamma'(t_h)| = |\gamma'(t)|$$

  e

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right| = |\gamma'(t)|$$

  (*dimostrare questo secondo fatto per esercizio*)

- dal *Criterio del confronto*, otteniamo da (2) che si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h} = |\gamma'(t)|$$

- ovvero ψ è derivabile e vale

$$\psi'(t) = |\gamma'(t)|$$

- integrando su $[a, b]$ ed usando il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*, si ottiene

$$\psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \psi'(t)\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

- ma $\psi(t)$ era la funzione "lunghezza", ovvero

$$\psi(t) = \ell(\gamma; [a, t])$$

- osservando che $\psi(a) = 0$, abbiamo quindi ottenuto

$$\ell(\gamma; [a, b]) = \psi(b) - \psi(a) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

- la dimostrazione è conclusa

Esercizio

Si calcoli la lunghezza dell'elica cilindrica

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad \textit{per } t \in [0, 10\,\pi].$$

Soluzione

- È curva di classe C^1
- possiamo usare il *Teorema di rettificabilità* per dire che

$$\gamma \text{ è rettificabile}$$

  e calcolarne la lunghezza
- si ha infatti

$$\ell(\gamma) = \int_0^{10\,\pi} |\gamma'(t)|\, dt$$

- il vettore velocità è dato da

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \qquad \text{per } t \in [0, 10\,\pi],$$

- il suo modulo è dunque

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

- abbiamo allora

$$\ell(\gamma) = \int_0^{10\,\pi} |\gamma'(t)|\, dt = 10\,\pi\,\sqrt{2}$$

- questo conclude l'esercizio

Esercizio

Si calcoli la lunghezza dell'elica cilindrica non uniforme

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2), \qquad \textit{per } t \in [0, 4\,\pi].$$

Soluzione

- Come prima, osserviamo che la curva è C^1
- dal *Teorema di rettificabilità* abbiamo che

$$\gamma \text{ è rettificabile}$$

  e vale

$$\ell(\gamma) = \int_0^{4\,\pi} |\gamma'(t)|\, dt$$

- il vettore velocità è dato da

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 2\,t), \qquad \text{per } t \in [0, 4\,\pi],$$

- il suo modulo è dunque

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4\,t^2} = \sqrt{1 + 4\,t^2}$$

- abbiamo allora

$$\ell(\gamma) = \int_0^{4\,\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{4\,\pi} \sqrt{1 + 4\,t^2}\,dt$$

- per calcolare questo integrale, facciamo il cambio $2\,t = s$

$$\ell(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{8\,\pi} \sqrt{1 + s^2}\,ds$$

- integrale già visto ad ANALISI MATEMATICA A
- si usa il cambio di variabile $s = \sinh \tau$
- di conseguenza $ds = \cosh \tau \, d\tau$
- gli estremi di integrazione diventano

$$0 \mapsto 0 \qquad \text{e} \qquad 8\,\pi \mapsto \arg\sinh(8\,\pi)$$

- abbiamo quindi (**ricorda** $\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau = 1$)

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \frac{1}{2} \int_0^{\arg\sinh(8\,\pi)} \sqrt{1 + \sinh^2 \tau} \, \cosh \tau \, d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\arg\sinh(8\,\pi)} \cosh^2 \tau \, d\tau\end{aligned}$$

- finire per casa (*soluzione completa sulle dispense, Esercizio 7.6.2*)

Esercizio (Cicloide)

Sia P un punto materiale che si trova su una ruota di raggio 1. La ruota comincia a rotolare in avanti senza slittamenti. Si descriva la traiettoria del punto P.

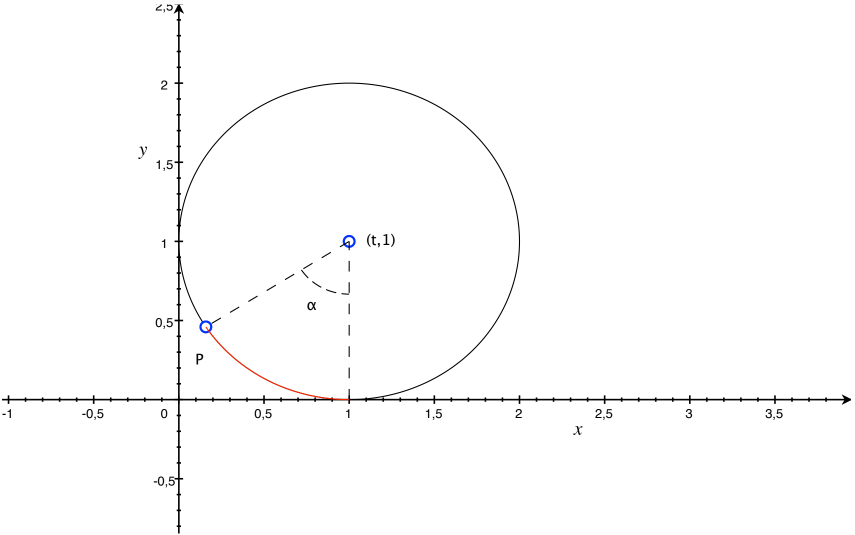
Soluzione

- Per semplicità, possiamo supporre che $P = (0,0)$ all'inizio
- schematizziamo la ruota in posizione iniziale come il cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1
- la ruota comincia a rotolare lungo l'asse delle x
- prima di impostare il problema, cerchiamo di avere un'idea di quello che succede

(Il professore ha perso mezz'ora solo per creare questa animazione, spero apprezzerete)

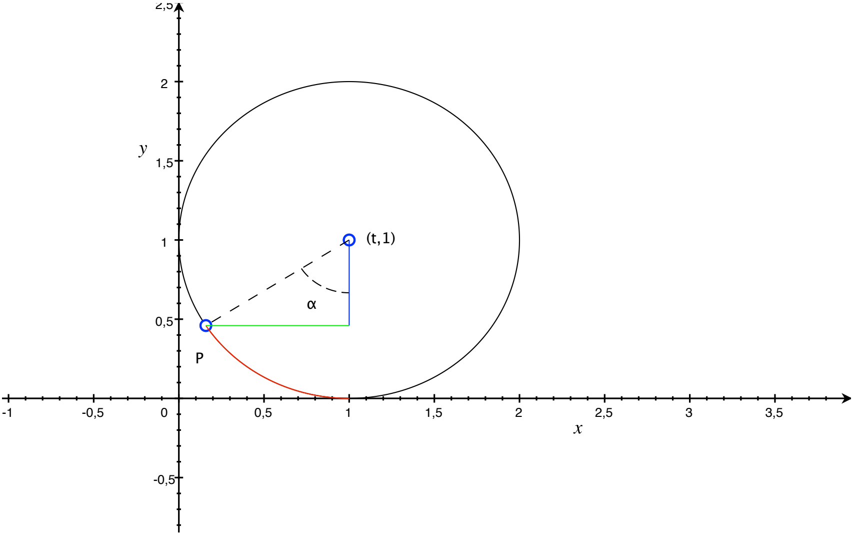
La traiettoria del punto P (in rosso)

- Introduciamo il parametro t, che rappresenta lo spostamento del centro della ruota dall'asse delle y
- supponiamo quindi che la ruota abbia cominciato il suo movimento ed il centro della ruota si trovi quindi in $(t, 1)$
- il punto P ha percorso un tratto di circonferenza di lunghezza t e si trova quindi in...



2,5
2
1,5
1
0,5
-0,5
y
x
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
(t,1)
α
P

Per trovare le coordinate di P in funzione di t, dobbiamo sapere quanto sono lunghi il blu ed il verde



- coordinate di P

$$P = (t - \text{“verde''}, 1 - \text{“blu''})$$

- usando un po' di trigonometria, si ha

$$\text{“verde''} = \sin\alpha \qquad \text{e} \qquad \text{“blu''} = \cos\alpha$$

- d'altronde l'angolo α (misurato in radianti) coincide con l'arco di circonferenza (in rosso) percorso dal punto P
- ovvero $\alpha = t$
- in conclusione, il punto P ha coordinate

$$P = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

- la curva $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ così ottenuta si chiama **cicloide di raggio unitario**

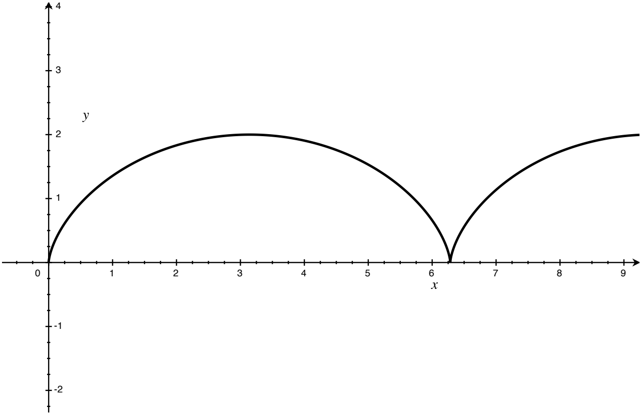


Figura: Il sostegno della cicloide $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

Esercizio

Si consideri la cicloide di raggio unitario

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \qquad \textit{per } t \in [0, 4\,\pi]$$

1. *Se ne calcoli il versore tangente, nei punti in cui questo è possible*
2. *si dica se γ è rettificabile ed, in caso affermativo, calcolarne la lunghezza*

Soluzione

1. Cominciamo osservando che γ è una curva C^1
   - il vettore velocità è dato da

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t), \qquad \text{per } t \in [0, 4\,\pi]$$

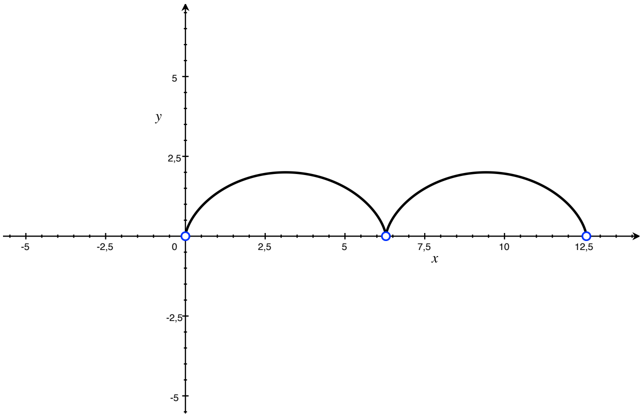
- il suo modulo è quindi

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} \qquad t \in [0, 4\pi]$$

- $|\gamma'(t)| = 0$ per $t = 0$, $t = 2\pi$ e $t = 4\pi$
- γ **non** è regolare e **nemmeno** regolare a tratti
- il versore tangente può essere calcolato nei punti in cui $|\gamma'(t)| \neq 0$ ed è

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \left(\frac{1-\cos t}{\sqrt{2-2\cos t}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2-2\cos t}}\right)$$

definito per $t \in (0, 2\pi) \cup (2\pi, 4\pi)$



Nei punti evidenziati

$$\gamma(0), \qquad \gamma(2\,\pi), \qquad \gamma(4\,\pi)$$

il versore tangente **non** è definito

2. Discutiamo adesso la rettificabilità della cicloide
   - dal momento che γ è C^1, dal *Teorema di rettificabilità* abbiamo che ha lunghezza finita
   - vale inoltre
$$\ell(\gamma) = \int_0^{4\,\pi} |\gamma'(t)|\, dt$$
   - abbiamo visto prima che
$$|\gamma'(t)| = \sqrt{2 - 2\,\cos t} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \cos t}$$
   - allora
$$\ell(\gamma) = \sqrt{2}\,\int_0^{4\,\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt$$
   - per calcolare questo integrale, usiamo la **formula di bisezione**
$$\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$$

- abbiamo allora

$$\ell(\gamma) = \sqrt{2}\int_0^{4\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\int_0^{4\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt$$
$$= 2\int_0^{4\pi}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\,dt$$

- il calcolo dell'ultimo integrale è piuttosto semplice, ma dobbiamo fare attenzione al **valore assoluto**

$$\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \begin{cases} \sin\left(\frac{t}{2}\right), & \text{se } 0 \le t \le 2\pi, \\ \\ -\sin\left(\frac{t}{2}\right), & \text{se } 2\pi \le t \le 4\pi, \end{cases}$$

- in definitiva

$$
\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= 2 \int_0^{2\,\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt - 2 \int_{2\,\pi}^{4\,\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt \\
&= 2 \left[-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\,\pi} + 2 \left[2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_{2\,\pi}^{4\,\pi} \\
&= 16
\end{aligned}
$$

- l'esercizio è concluso

I.4 Riparametrizzazioni

Definizione

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva

Sia $\phi : [c, d] \to [a, b]$ continua e invertibile

La nuova curva

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [c, d] \to \mathbb{R}^N,$$

si dice **riparametrizzazione di** γ

Tale riparametrizzazione:

- **conserva l'orientazione** se ϕ è crescente
- **inverte l'orientazione** se ϕ è decrescente

La funzione ϕ si chiama talvolta *legge oraria del moto*

Spiegazione

Una riparametrizzazione di una curva γ è un modo diverso di percorrere la traiettoria descritta da γ

Più precisamente, è facile convincersi che una curva γ ed una sua riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}$ hanno lo stesso sostegno.

Esempi

1. sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
   - sia $\phi : [0,1] \to [0, 2\pi]$ crescente definita da
   $$\phi(s) = 2\pi s$$
   - la curva
   $$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s)) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \qquad s \in [0,1]$$
   è una riparamatrizzazione che conserva l'orientazione

- $\widetilde{\gamma}$ rappresenta ancora un moto circolare uniforme di raggio 1, in senso antiorario
- cosa cambia rispetto a γ? Calcoliamo la velocità
- dalla regola di derivazione della **funzione composta** si ha

$$\widetilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\phi(s))\,\phi'(s)$$

- osservando che $\phi'(s) = 2\,\pi$ e ricordando che $|\gamma'| = 1$, si ottiene

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = 2\,\pi$$

- quindi la riparametrizzazione $\widetilde{\gamma}$ si muove ancora a velocità costante....ma più grande!

2. prendiamo la curva $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ con $t \in [0, 1]$

- sia $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ crescente definita da

$$\phi(t) = t^2$$

- la curva

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s)) = (\cos(2\pi s^2), \sin(2\pi s^2)) \qquad s \in [0, 1]$$

  è una riparamatrizzazione che conserva l'orientazione

- $\widetilde{\gamma}$ rappresenta ancora un moto circolare di raggio 1, in senso antiorario, ma stavolta...

- ....la velocità non è costante in modulo!

$$|\widetilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(\phi(s))|\,\phi'(s) = 2\pi \cdot 2s = 4\pi s$$

- il moto circolare parte con velocità nulla per $s = 0$ ed il modulo della velocità aumenta al crescere di s

3. sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva

- prendiamo la funzione decrescente $\phi : [a, b] \to [a, b]$

$$\phi(s) = b - s + a$$

- la curva

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s)) = \gamma(b - s + a)$$

  è una riparametrizzazione di γ che inverte l'orientazione

- γ e $\widetilde{\gamma}$ descrivono la stessa traiettoria nello stesso intervallo di tempo $[a, b]$, ma $\widetilde{\gamma}$ percorre la traiettoria **in senso inverso**

Illustriamo la riparametrizzazione precedente con un'animazione: il punto in rosso rappresenta la curva

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad t \in [-2, 2]$$

mentre il punto blu è la sua riparametrizzazione dell'esempio precedente

Proposizione

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *è curva* C^1 *a tratti e* $\widetilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{R}^N$ *è sua riparametrizzazione*

$$\boxed{\ell(\gamma) = \ell(\widetilde{\gamma})}$$

Dimostrazione

Usiamo il *Teorema di rettificabilità* ed il cambio di variabile $t = \phi(s)$

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt &= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} |\gamma'(\phi(s))|\, \phi'(s)\, ds \\ &= \int_c^d |\widetilde{\gamma}'(s)|\, ds = \ell(\widetilde{\gamma})\end{aligned}$$