Analisi Matematica B
– *Lezione 1* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 3 Marzo 2020

Capitolo I

“*Curve nello spazio*”

I.1 Preliminari

Cominciamo ricordando alcune nozioni ed alcuni risultati che dovrebbero essere già stati visti nel corso di

GEOMETRIA E ALGEBRA

—

Indichiamo un *vettore* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ dello spazio $N-$dimensionale

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \qquad \text{con } x_i \in \mathbb{R}.$$

Le quantità x_i si chiamano *coordinate* del vettore $\mathbf{x}$

Casi particolari

Nel caso $N = 2$, useremo anche la notazione $\mathbf{x} = (x, y)$

Nel caso $N = 3$, useremo anche la notazione $\mathbf{x} = (x, y, z)$

Modulo di un vettore

È il numero reale positivo definito da

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}$$

Per il *Teorema di Pitagora*, $|\mathbf{x}|$ è la distanza dall'origine degli assi

$$(0, 0, \ldots, 0)$$

del punto di coordinate

$$(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

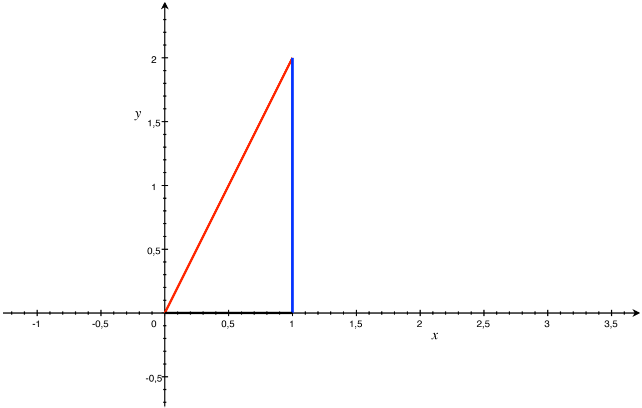


Figura: In rosso il vettore $\mathbf{x} = (1, 2)$. Il suo modulo, ovvero la lunghezza del segmento rosso, si ottiene usando il Teorema di Pitagora

Come si vede dal disegno precedente, $|\mathbf{x}|$ si può pensare come la lunghezza del vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$.

In questo modo, dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ possiamo pensare alla quantità

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}$$

come alla <u>distanza</u> tra i due punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dello spazio $N-$dimensionale

Importante

Alla luce di quanto detto, l'insieme

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \ : \ |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| = R \right\}$$

rappresenta l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^N$ che si trovano a distanza assegnata R da un centro fissato $\mathbf{x}_0$. Ovvero, si tratta di una **sfera centrata in $\mathbf{x}_0$, con raggio** R

Giusto per fissare le idee, vediamo un esempio

Esempio

Si calcoli la distanza tra i punti

$$\mathbf{x} = (1, 2, 3) \qquad e \qquad \mathbf{y} = (1, -1, 4)$$

Usando la definizione di modulo, si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= \sqrt{(1-1)^2 + (2-(-1))^2 + (3-4)^2} \\ &= \sqrt{0 + (3)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Vediamo un primo risultato che ci potrà tornare utile in seguito

Lemma (Stima base)

Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, *si ha*

$$\max\left\{|x_i| \,:\, i = 1, \ldots, N\right\} \leq |\mathbf{x}| \qquad e \qquad |\mathbf{x}| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

Dimostrazione

Facciamo la dimostrazione nel caso di dimensione $N = 2$

– Dimostriamo la prima disuguaglianza –

- Osserviamo che

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{x_1^2} = |x_1|$$

- anche, in modo simile

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{x_2^2} = |x_2|$$

- abbiamo quindi dimostrato che

$$|\mathbf{x}| \geq |x_1| \qquad \text{ed anche} \qquad |\mathbf{x}| \geq |x_2|$$

- abbiamo allora

$$|\mathbf{x}| \geq \max\Big\{|x_1|,\, |x_2|\Big\},$$

che era la prima disuguaglianza che volevamo

– Dimostriamo adesso la seconda disuguaglianza –

- osserviamo che la funzione **radice quadrata** ha la proprietà seguente

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \forall a, b \geq 0$$

(*dimostrare questa proprietà come* **Esercizio per casa**)

- usando questa proprietà si ha

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} = |x_1| + |x_2|$$

come volevamo!

Illustriamo il risultato precedente in modo grafico per $N = 2$

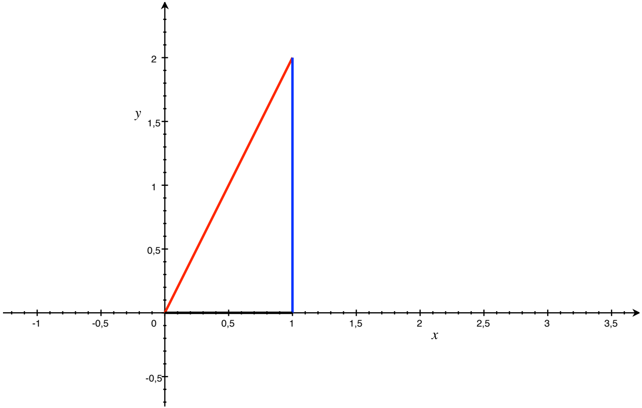


Figura: Il Lemma precedente ci dice che la lunghezza dell'ipotenusa (in rosso) è maggiore di ognuno dei due cateti, ma minore della somma di questi due

Ricordiamo che se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ è un *vettore* e $t \in \mathbb{R}$ è uno *scalare*, è definita la moltiplicazione

$$t\,\mathbf{x} = (t\,x_1, \dots, t\,x_N)$$

Non è difficile vedere in base alla definizione, che per il modulo vale

$$|t\,\mathbf{x}| = |t|\,|\mathbf{x}| \qquad \textit{(omogeneità del modulo)}$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} |t\,\mathbf{x}| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (t\,x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} t^2\,x_i^2} \\ &= \sqrt{t^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2} = |t| \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = |t|\,|\mathbf{x}| \end{aligned}$$

Prodotto scalare standard

Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, è definito come

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \, y_i$$

Osservazione

Si ricordi che l'operazione di *prodotto scalare* prende due vettori e da' come risultato un numero reale

Proprietà del prodotto scalare

- **simmetria** $\qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- **bilinearità** $\qquad \langle t\,\mathbf{x} + s\,\mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = t\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + s\,\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$

  per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$

Definizione

Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ si dicono **ortogonali** se vale

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

Esempio

Si verifica facilmente che i due vettori $\mathbf{x} = (1, -2)$ e $\mathbf{y} = (4, 2)$ sono ortogonali

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

Nel caso $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ vale

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\cos\vartheta,$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$

- infatti usando la scrittura in coordinate polari

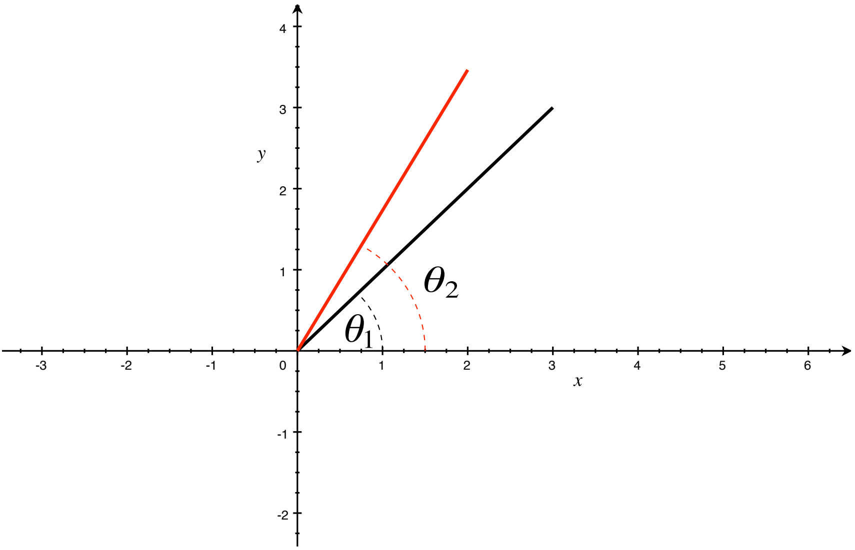
$$\mathbf{x} = (|\mathbf{x}|\,\cos\vartheta_1, |\mathbf{x}|\,\sin\vartheta_1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = (|\mathbf{y}|\,\cos\vartheta_2, |\mathbf{y}|\,\sin\vartheta_2)$$

- in base alla definizione si ottiene

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\Big(\cos\vartheta_1\,\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\Big) = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\,\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

  dove abbiamo usato le *formule di addizione per il coseno* (vedi *Lezione 7* di Analisi Matematica A)

- $\vartheta_1 - \vartheta_2$ è l'angolo formato dai due vettori



y
x
θ_1
θ_2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
4
3
2
1
-1
-2

Un risultato molto importante che riguarda il prodotto scalare è il seguente

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \qquad \text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

Dimostrazione

Si faccia attenzione innanzitutto ai simboli:

- a sinistra di (1), il simbolo $|\cdot|$ indica il **valore assoluto** del numero reale $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- a destra, il simbolo $|\cdot|$ indica il **modulo** dei vettori

– Procediamo adesso con la dimostrazione –

1. Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, la disuguaglianza (1) è banalmente vera, dal momento che

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{0}| = 0$$

2. nel fare la dimostrazione, possiamo quindi supporre che $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$
3. dimostriamo per il momento la disuguaglianza (1) sotto l'ipotesi aggiuntiva che $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono entrambi **versori**, ovvero che

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$$

4. in tal caso, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz diventa

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq 1 \tag{2}$$

5. cominciamo scrivendo il prodotto scalare

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{N} x_i \, y_i \right|$$

6. usiamo adesso la *disuguaglianza triangolare per i numeri reali*, ovvero il fatto che

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

7. questo ci permette di dire che

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{N} x_i \, y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i \, y_i|$$

8. osserviamo adesso che vale

$$|a\,b| \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \qquad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R}$$

che si chiama *disuguaglianza di Young*

9. usando questo risultato, abbiamo allora riprendendo da prima

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i \right| &\le \sum_{i=1}^{N} |x_i\, y_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{|x_i|^2}{2} + \frac{|y_i|^2}{2} \right) \\ &= \frac{|\mathbf{x}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{y}|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato che stiamo supponendo $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$

10. abbiamo fin'ora dimostrato la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* per vettori che hanno modulo 1

11. e per vettori generali come si fa? Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ non nulli, osserviamo che i nuovi vettori

$$\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\,\mathbf{x} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{y}|}\,\mathbf{y}$$

sono tali che (usando *omogeneità del modulo*, visto prima)

$$|\mathbf{v}| = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\,|\mathbf{x}| = 1 \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{w}| = \frac{1}{|\mathbf{y}|}\,|\mathbf{y}| = 1$$

12. per ciò che abbiamo dimostrato fino ad adesso, abbiamo quindi

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq 1$$

13. ricordando la definizione di **v** e **w**, possiamo riscrivere la disuguaglianza precedente come

$$\left| \left\langle \frac{1}{|\mathbf{x}|}\,\mathbf{x}, \frac{1}{|\mathbf{y}|}\,\mathbf{y} \right\rangle \right| \leq 1$$

14. usando la *bilinearità del prodotto scalare standard*, si ottiene dalla precedente

$$\frac{1}{|\mathbf{x}|}\,\frac{1}{|\mathbf{y}|}\,|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq 1$$

15. moltiplicando ambo i membri per la quantità positiva $|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$, si conclude che

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$$

come volevamo!

Esercizio (Disuguaglianza di Young)

Nella dimostrazione precedente abbiamo utilizzato che

$$|a\,b| \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \qquad \textit{per ogni } a, b \in \mathbb{R}$$

Dimostrare questa disuguaglianza.

Soluzione

Ricordando le proprietà del valore assoluto, quello che dobbiamo dimostrare è

$$-\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} \le a\,b \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

- Si osservi che

$$0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

- ovvero, sommando la quantità $2\,a\,b$ ad ambo i membri

$$2\,a\,b \le a^2 + b^2$$

- ....e dividendo per 2, si ha

$$a\,b \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

- in modo del tutto simile

$$0 \leq (a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

- ovvero, sommando la quantità $-2\,a\,b$ ad ambo i membri

$$-2\,a\,b \leq a^2 + b^2$$

- da cui si ottiene

$$a\,b \geq -\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}$$

Un'importante conseguenza di **Cauchy-Schwarz** è il seguente

Corollario (Disuguaglianza triangolare)

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$$

Dimostrazione

- Cominciamo osservando che per ogni vettore vale

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

- usiamo questo fatto per il vettore $\mathbf{x} + \mathbf{y}$

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| = \sqrt{\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle}$$

- usiamo adesso la proprietà di *bilinearità del prodotto scalare*

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x}+\mathbf{y}| &= \sqrt{\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle} \\
&= \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}
\end{aligned}
$$

- usiamo anche la *simmetria del prodotto scalare*, quindi da prima otteniamo

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x}+\mathbf{y}| &= \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle} \\
&= \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + |\mathbf{y}|^2}
\end{aligned}
$$

- usiamo adesso la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* per dire che

$$
\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + |\mathbf{y}|^2} \leq \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2}
$$

- abbiamo quindi ottenuto che

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2}$$

- osserviamo adesso che sotto la radice quadrata c'è... il quadrato di un binomio! Infatti

$$\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2} = \sqrt{(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2}$$

- osservando che la quantità $|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ è **positiva**, abbiamo allora dimostrato che

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq \sqrt{(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2} = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

- la dimostrazione è conclusa

Esercizio (per casa)

Dimostrare che si ha

$$\Big| |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \Big| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$$

I.2 Curve

Definizione

Una **curva in** $\mathbb{R}^N$ è una funzione

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$$

Solitamente, useremo $t \in [a, b]$ come nome della variabile di una curva γ

Per definizione, si ha quindi

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_N(t)), \qquad t \in [a, b],$$

ed ogni *componente* γ_i è una funzione da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$.

Ricorda

Le funzioni definite su un intervallo $[a, b]$ a valori reali sono le funzioni che abbiamo studiato ad Analisi Matematica A

Esempio

Prendiamo la curva

$$\gamma : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$$

definita da $\quad \gamma_1(t) = \cos t \quad$ e $\quad \gamma_2(t) = \sin t$, ovvero

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \text{per ogni } t \in [0, 2\,\pi]$$

Si osservi che questa curva ha la proprietà che

$$|\gamma(t)| = \sqrt{(\gamma_1(t))^2 + (\gamma_2(t))^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

Tutti i punti della forma $\gamma(t)$ si trovano sulla circonferenza di centro l'origine $(0, 0)$ e raggio 1

Più precisamente, al variare di $t \in [0, 2\,\pi]$, $\gamma(t)$ descrive tutti e soli i punti di questo cerchio

Interpretazione cinematica del concetto di curva

Mettiamoci adesso in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$

• $[a, b]$ rappresenta un *intervallo temporale*

• la variabile t rappresenta il tempo

• la curva γ rappresenta il moto di un punto materiale che si muove nel piano o nello spazio

Ad ogni istante di tempo $t \in [a, b]$, il punto si troverà alle coordinate

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$$

oppure

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

Attenzione!

NON si deve confondere la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ **con la sua immagine**.

Quest'ultima, per quanto visto ad Analisi Matematica A, è data da

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \gamma([a, b]) = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \ : \ \exists t \in [a, b] \text{ tale che } \gamma(t) = \mathbf{x} \Big\}$$

- una *curva* infatti è una funzione
- la sua *immagine* è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$

Definizione

L'insieme $\gamma([a, b])$ si chiama **sostegno** della curva. Lo indicheremo con il simbolo

$$\mathrm{Im}(\gamma)$$

Esempio

Riprendiamo la curva

$$\gamma : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$$

definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \text{per ogni } \; t \in [0, 2\,\pi]$$

Per quanto detto in precedenza, il suo sostegno è dato da

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\Big\}$$

ovvero è il cerchio centrato in $(0, 0)$, con raggio 1

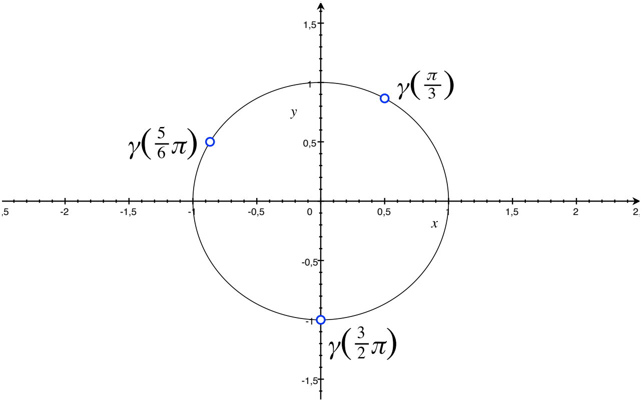


Figura: Il sostegno della curva $\quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad$ per $t \in [0, 2\,\pi]$.
In evidenza, i punti del sostegno corrispondenti alle scelte $t = \pi/3$, $t = 5/6\,\pi$ e $t = 3/2\,\pi$.

Esempio

Consideriamo la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t, t^2), \qquad \text{per ogni } t \in [0,1]$$

In base alla definizione, il suo sostegno è dato da

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\gamma) = \gamma([0,1]) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \exists t \in [0,1] \text{ tale che } x = t, y = t^2\} \\ &= \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in [0,1]\}\end{aligned}$$

Se ricordiamo la definizione di **grafico di una funzione**, abbiamo allora che <u>in questo caso</u> il sostegno di γ coincide con il grafico della funzione $t \mapsto t^2$, definita sull'intervallo $[0,1]$

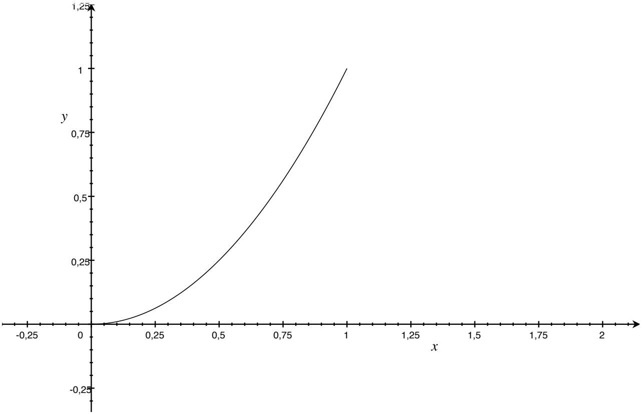


Figura: Il sostegno della curva $\gamma(t) = (t, t^2)$ dell'esempio precedente, definita su $[0, 1]$

Esempio

Consideriamo la curva seguente $\gamma : [0, 10\,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad \text{per } t \in [0, 10\,\pi]$$

Si osservi che le prime due componenti di γ descrivono un cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1, nel piano $x\,y$. Tuttavia, abbiamo una terza componente, che aumenta all'aumentare della variabile t.

Abbiamo quindi che $\gamma(t)$ descrive una traiettoria che, vista "dall'alto", ruota intorno all'asse z, ma mentre ruota aumenta anche di quota. Stiamo quindi descrivendo un movimento a "vite"

Tale curva si chiama **elica cilindrica**. Il nome "cilindrica" deriva dal fatto che

$$\mathrm{Im}(\gamma) \subset \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1,\, z \in \mathbb{R}\Big\}$$

quest'ultimo insieme coincide appunto con il cilindro a sezione circolare di raggio 1, avente come asse di rotazione l'asse z

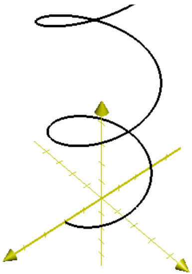


Figura: Il sostegno dell'elica cilindrica $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

Esercizio

Si trovi una curva il cui sostegno coincida con il cerchio di centro $(0, 2)$ *e raggio* 2

Soluzione

- Sappiamo già scrivere una curva il cui sostegno coincida con il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1
- cerchiamo di ricondurci a questo caso
- Il cerchio in esame può essere ottenuto dal cerchio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}$, usando le due operazioni
  1. dilatare tutti i suoi punti di un fattore 2
  2. traslare tutti i suoi punti del vettore $\mathbf{v} = (0, 2)$

- Ricordando che dilatare un punto (x, y) di un fattore 2 vuol dire considerare
$$(2\,x, 2\,y)$$

- ...abbiamo che tutti i punti del cerchio in esame, possono essere scritti come
$$2\,(x, y) + \mathbf{v} = (2\,x, 2\,y) + (0, 2) = (2\,x, 2\,y + 2)$$
dove (x, y) sono punti del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1

- infine, tutti i punti del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 possono essere scritti come
$$(\cos t, \sin t), \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi]$$
abbiamo che
$$\gamma(t) = (2\,\cos t, 2\,\sin t + 2), \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi]$$
è la curva cercata

Esercizio (per casa)

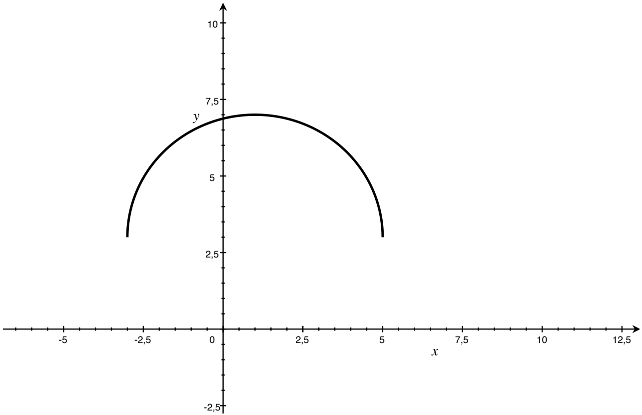
Generalizzare l'esercizio precedente, trovando una curva il cui sostegno sia l'insieme

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\right\}$$

ovvero la circonferenza centrata in (x_0, y_0)*, di raggio* R

Esercizio (per casa)

Si trovi una curva il cui sostegno coincida con la semicirconferenza superiore di centro $(1, 3)$ *e raggio* 4



Esercizio (IMPORTANTE)

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ *due punti, si trovi una curva il cui sostegno coincida con il segmento che unisce* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.

Soluzione

- Osserviamo innanzitutto che il segmento in esame è parallelo al vettore differenza

$$\mathbf{y} - \mathbf{x}$$

- inoltre, se consideriamo per ogni $t \in [0, 1]$ il vettore

$$t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

  questo ha ancora la stessa direzione e lo stesso verso (quindi è ancora parallelo al segmento)

- trasliamo adesso questo vettore di $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} + t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

- la curva data da

$$\gamma(t) = \mathbf{x} + t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

rappresenta la curva cercata. Si osservi che

$$\gamma(0) = \mathbf{x} \qquad \text{e} \qquad \gamma(1) = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

Inoltre, in base alla *regola del parallelogramma*, per costruzione tutti i punti $\gamma(t)$ appartengono al segmento

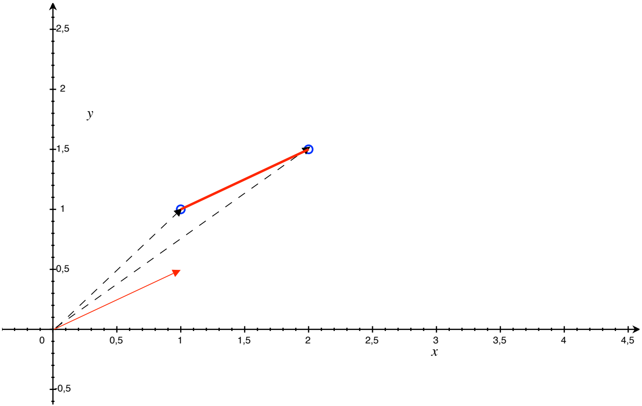


Figura: In rosso il segmento che unisce i due punti. La freccia rossa in basso, corrisponde al vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$. Moltiplicando questo vettore per $t \in [0, 1]$ lo si "accorcia", sommandoci $\mathbf{x}$ si riporta questa freccia in corrispondenza del punto base $\mathbf{x}$ e si ottiene un punto che appartiene al segmento

Definizione

Diciamo che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è **continua in** $t_0 \in [a, b]$ se vale

$$\lim_{t \to t_0} |\gamma(t) - \gamma(t_0)| = 0$$

Proposizione

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *è continua in* $t_0 \in [a, b]$ *se e solo se tutte le sue componenti* $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ *lo sono*