Analisi Matematica B
– *Lezione 2* –

Lorenzo Brasco

(Università degli Studi di Ferrara)

Ferrara, 4 Marzo 2020

Definizione

Diciamo che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è **continua in** $t_0 \in [a, b]$ se vale

$$\lim_{t \to t_0} |\gamma(t) - \gamma(t_0)| = 0$$

Proposizione

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *è continua in* $t_0 \in [a, b]$ *se e solo se tutte le sue componenti* $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ *lo sono*

Dimostrazione

- Se γ è continua in t_0, allora si ha

$$\lim_{t \to t_0} |\gamma(t) - \gamma(t_0)| = 0$$

- usando il Lemma "*Stima base*" (vedi *Lezione 1*), si ha

$$|\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_0)|, \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, N.$$

- in particolare, ne segue che

$$\lim_{t\to t_0} |\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| = 0, \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, N,$$

ovvero ogni componente è continua in t_0 (si ricordi la definizione di *funzione continua* vista ad Analisi Matematica A)

- viceversa, se ogni componente è continua in t_0, allora sempre dal Lemma "*Stima base*", si ha

$$\lim_{t\to t_0} |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \le \sum_{i=1}^{N} \lim_{t\to t_0} |\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| = 0$$

ovvero γ è continua in t_0

Definizione

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una curva continua su $[a, b]$. Si dice che γ è:

- *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- *semplice* se è iniettiva su $[a, b)$;
- un *circuito*, se è semplice e chiusa.

Osservazione

Detto in parole povere, una curva semplice è una curva che **non passa mai** 2 **volte dallo stesso punto**, a meno che questo punto non sia il punto iniziale $\gamma(a)$

Esempi

1. la curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi]$$

   è un *circuito*, dal momento che è *semplice* (per $t \in [0, 2\,\pi)$ non passa mai due volte dallo stesso punto) ed è *chiusa*, visto che

$$\gamma(0) = \gamma(2\,\pi) = (1, 0)$$

2. dati due punti distinti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, la curva

$$\gamma(t) = \mathbf{x} + t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \qquad \text{per } t \in [0, 1],$$

   è semplice, ma non è chiusa

3. la curva (*attenzione all'intervallo di definizione!*)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad \text{per } t \in [0, 3\,\pi]$$

non è chiusa, dal momento che

$$\gamma(0) \neq \gamma(3\,\pi)$$

e non è nemmeno semplice, visto che

$$\gamma(t + 2\,\pi) = \gamma(t), \qquad \text{per } t \in [0, \pi]$$

quindi non può essere iniettiva

Definizione

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è **derivabile in** $t_0 \in [a, b]$ se esiste il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma_N(t) - \gamma_N(t_0)}{t - t_0} \right)$$

ovvero se ogni componente è *derivabile in* t_0.
(Si ricordi la definizione di derivabilità vista ad Analisi Matematica A)

Quando ciò avviene, il vettore

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_N'(t_0)),$$

si chiama **derivata di** γ **in** t_0

Interpretazione cinematica di γ'

Abbiamo visto che $\gamma(t)$ rappresenta la posizione di un punto materiale al tempo t

Il rapporto incrementale

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

è quindi il rapporto tra lo **spostamento del punto** e l'**intervallo di tempo** in cui questo avviene

Il rapporto incrementale è della forma

$$\frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \text{velocità}$$

Quando $t \to t_0$, si ottiene il **vettore velocità istantanea**

Questa è l'interpretazione da dare al vettore $\gamma'(t_0)$, che verrà anche detto **vettore velocità della curva** γ al tempo t_0

Analogamente, se la curva è derivabile due volte, il vettore

$$\gamma''(t_0) = (\gamma_1''(t_0), \dots, \gamma_N''(t_0))$$

costituito dalle derivate seconde delle componenti, si dirà **vettore accelerazione della curva** γ al tempo t_0

Interpretazione geometrica di γ'

Prendiamo $t_0 < t_1$ appartenenti ad $[a, b]$

La retta che passa dai punti $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$ può essere parametrizzata come

$$\gamma(t_0) + (t - t_0)\,\frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}, \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

Quando $t_1 \to t_0$, se γ è derivabile in t_0 l'equazione precedente diventa

$$\boxed{\gamma(t_0) + (t - t_0)\,\gamma'(t_0), \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}}$$

che rappresenta la **retta tangente al sostegno della curva nel punto** $\gamma(t_0)$, scritta in forma parametrica (si veda il corso Geometria e Algebra)

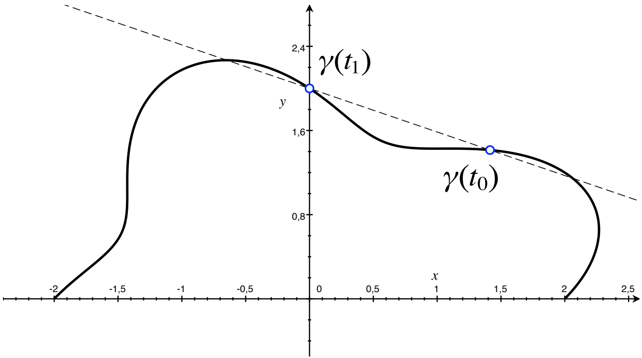


Figura: Il sostegno di una curva γ e la retta passante dai due punti $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$. Quando $t_1 \to t_0$, il punto $\gamma(t_1)$ si avvicina a $\gamma(t_0)$ (grazie alla continuità) e la retta tende a diventare tangente al sostegno

• Si osservi che la *direzione* ed il *verso* di tale retta tangente sono determinati dal vettore velocità $\gamma'(t_0)$

• Unendo le due interpretazioni, geometrica e cinematica, abbiamo che

il vettore velocità è tangente al sostegno della curva

in ogni punto ove questo è definito

• In altre parole, la velocità è tangente alla direzione del moto, come è naturale

Esercizio

Si consideri la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, *con* $t \in [0, 2\pi]$.

1. *Si calcoli il vettore velocità*
2. *se ne calcoli il modulo*
3. *si scriva l'equazione della retta tangente a* $\mathrm{Im}(\gamma)$, *nel punto* $\gamma(\pi/4)$

Soluzione

1. Le componenti di γ sono derivabili per ogni $t \in [0, 2\pi]$

   Quindi γ è derivabile in ogni punto di $[0, 2\pi]$

   Si ha

   $$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t), \qquad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

2. Il modulo della velocità, è dato da

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

ovvero il modulo della velocità **è costante**

3. usando la formula vista in precedenza, l'equazione della retta tangente nel punto assegnato è data da

$$\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(t - \frac{\pi}{4}\right)\gamma'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

in forma parametrica, ovvero

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(t - \frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Proviamo a scrivere questa retta in forma cartesiana

In base a quanto fatto prima, tutti i punti (x, y) della nostra retta, sono della forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi dalla seconda componente

$$t - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Possiamo sostituire $t - \pi/4$ nella prima componente

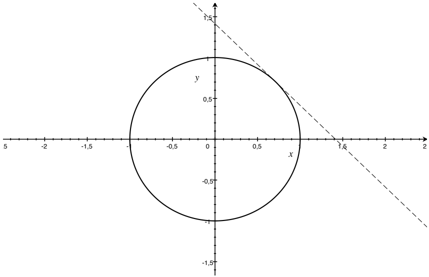
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Dopo un paio di semplificazioni, si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - y + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ovvero infine, scritta in forma canonica, si ha

$$y = \sqrt{2} - x$$



Osservazione importante

Abbiamo già osservato che la curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi]$$

ha come sostegno il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1

Inoltre, abbiamo visto prima che il modulo della velocità è costante

$$|\gamma'(t)| = 1$$

La curva γ descrive quindi il **moto circolare uniforme** di una particella, che si muove con velocità avente modulo 1 lungo un cerchio centrato nell'origine ed avente raggio unitario, **in senso antiorario**

Soffermiamoci ancora un attimo sull'esempio del **moto circolare uniforme**, ovvero $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

• Dalla fisica, sappiamo che in questa situazione dovremmo avere un'**accelerazione centripeta** di intensità costante

• In altre parole, il vettore accelerazione $\gamma''(t)$ dovrebbe essere sempre **diretto verso il centro** $(0, 0)$ ed avere modulo costante

• In effetti si ha

$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

ovvero $\gamma''(t)$ è parallelo al vettore posizione $\gamma(t)$, ma ha verso opposto, per effetto del segno $-$

• inoltre, si vede facilmente che

$$|\gamma''(t)| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = 1$$

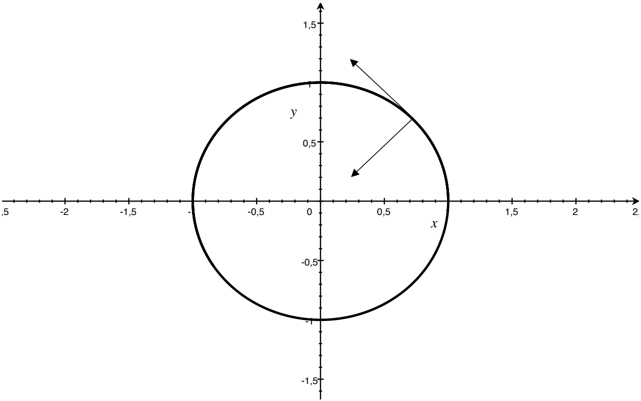


Figura: Il sostegno della curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Le due frecce indicano il vettore velocità $\gamma'(t)$ (tangente al moto) ed il vettore accelerazione $\gamma''(t)$ (ortogonale al moto)

Esercizio (per casa)

Si dia una curva che rappresenti il moto circolare uniforme di una particella, che si muove a velocità 4 *lungo un cerchio centrato in* $(1,1)$ *ed avente raggio* 2

Esercizio

Si consideri la curva

$$\gamma(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)), \qquad \textit{per } t \in [0, \sqrt{2\,\pi}]$$

Si dica se l'accelerazione ha modulo costante ed è ortogonale alla direzione del moto

Soluzione

- Osserviamo innanzitutto che la curva γ ha ancora la proprietà

$$|\gamma(t)| = \sqrt{(\cos(t^2))^2 + (\sin(t^2))^2} = 1$$

  ovvero γ descrive un moto circolare, di nuovo

- Tutti i punti $\gamma(t)$ si trovano infatti sul cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 1$, grazie al conto precedente

- tuttavia, **non** siamo in presenza di un moto circolare uniforme, infatti il modulo della velocità non è costante!
- precisamente, si ha

$$\gamma'(t) = (-2\,t\,\sin(t^2), 2\,t\,\cos(t^2))$$

da cui

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{4\,t^2\,(\sin(t^2))^2 + 4\,t^2\,(\cos(t^2))^2} = 2\,t, \quad \text{per } t \in [0, \sqrt{2\,\pi}]$$

- dal momento che l'accelerazione $\gamma''(t)$ descrive le variazioni della velocità e $\gamma'(t)$ varia sia in direzione (perché il moto è circolare), sia in modulo (perché il moto non è uniforme)...

- ...dobbiamo aspettarci che γ'' non sia ortogonale al moto, ma abbia
  - una componente "tangenziale" (responsabile della variazione del modulo di $\gamma'(t)$)
  - ed una componente "normale" (responsabile della variazione di direzione di $\gamma'(t)$)
- queste erano le chiacchere....facciamo il conto! Si ha

$$\gamma''(t) = \Big(-2\,\sin(t^2) - 4\,t^2\,\cos(t^2), 2\,\cos(t^2) - 4\,t^2\,\sin(t^2)\Big)$$

- si verifica adesso facilmente che $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ **non sono ortogonali**. Infatti, il loro prodotto scalare è

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 4\,t$$

che è non nullo per ogni $t \neq 0$

Definizione

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ si dice

- **continua** se è continua in ogni $t_0 \in [a, b]$
- **di classe** C^1 se è derivabile in ogni punto $t \in [a, b]$ e la derivata γ' è continua
- **regolare** se è C^1 e la velocità non si annulla mai

$$|\gamma'(t)| \neq 0, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Definizione

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è regolare, si può definire il suo **versore tangente** nel punto $\gamma(t)$

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \qquad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Esempi

1. La solita curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ è **regolare**, dal momento che è di classe C^1 e (*vedi esercizio precedente*)

   $$|\gamma'(t)| = 1 \neq 0, \qquad \text{per ogni } t \in [0, 2\pi]$$

   Il suo versore tangente è dato da

   $$\mathbf{T}_\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$$

2. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ due punti distinti, la curva

$$\gamma(t) = \mathbf{x} + t\,(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \qquad \text{per } t \in [0,1]$$

è regolare, dal momento che

$$\gamma'(t) = \mathbf{y} - \mathbf{x} \quad \text{quindi} \qquad |\gamma'(t)| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$$

Il versore tangente è dato da

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|},$$

che non dipende da t.

Se si ricorda che il sostegno di γ è un segmento e che il versore tangente deve darci la direzione ed il verso del moto, quanto trovato è perfettamente in accordo

3. la curva

$$\gamma(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)), \qquad \text{per } t \in [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$$

è di classe C^1 su $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$, ma **non è regolare**. Infatti, si ha

$$\gamma'(t) = (-2\,t\,\sin(t^2), 2\,t\,\cos(t^2)),$$

da cui si ha

$$\gamma'(0) = (0, 0)$$

Non è possibile definire $\mathbf{T}_\gamma(0)$

Ricordiamo la seguente definizione, che abbiamo già visto nel Capitolo VI "*Calcolo integrale per funzioni di una variabile*" ad ANALISI MATEMATICA A

Definizione

Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Siano $t_0, t_1, \dots, t_n \in [a, b]$, si dice che $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ è una **partizione di** $[a, b]$ se valgono le proprietà seguenti:

- $t_0 = a$ e $t_n = b$;
- $t_i < t_{i+1}$ per ogni $i = 0, \dots, n-1$.

Indicheremo con $\mathcal{P}([a, b])$ l'insieme di tutte le partizioni di $[a, b]$

Definizione

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è C^1 **a tratti** se valgono le due proprietà:

- è continua
- esiste $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ tale che γ è C^1 su ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$

Definizione

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è **regolare a tratti** se valgono le due proprietà:

- è continua
- esiste $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ tale che γ è regolare su ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$

Esempio

La curva $\gamma(t) = (t, |t|)$ definita su $[-1, 1]$ non è di classe C^1, di conseguenza non può essere regolare.

Tuttavia, osserviamo che i punti $\{-1, 0, 1\}$ formano una partizione di $[-1, 1]$ e

$$\gamma(t) = (t, -t), \qquad \text{per } t \in [-1, 0]$$

$$\gamma(t) = (t, t), \qquad \text{per } t \in [0, 1]$$

che mostrano come γ sia regolare su entrambi gli intervalli $[-1, 0]$ e $[0, 1]$

Quindi γ è regolare a tratti

I.3 Curve rettificabili

Il problema delle lunghezze

In questa sezione, vogliamo definire la **lunghezza** del sostegno di una curva e trovare un modo per calcolarla

Prima di dare la definizione rigorosa, cerchiamo di capire come possiamo affrontare il problema.

L'approccio è simile a quello che abbiamo usato per il **problema delle aree** (si veda "*Calcolo integrale per funzioni di una variabile*", ANALISI MATEMATICA A).

Informazione base

Sappiamo calcolare la lunghezza di un segmento che unisce due punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Tale lunghezza, è uguale alla distanza dei due punti, ovvero (*vedi Lezione 1*)

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2}$$

Idea

Per calcolare la lunghezza del sostegno di una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, procediamo **per approssimazione** tramite linee poligonali

In altre parole

- consideriamo un numero finito di punti da cui passa la curva $\gamma(a), \gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_N), \gamma(b)$
- connettiamo ognuno di questi punti al successivo tramite un segmento
- la lunghezza di ogni segmento è $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$
- sommando queste lunghezze, si ottiene un'approssimazione della lunghezza della curva γ

Importante

Dal momento che il segmento è il cammino più breve che connette due punti, l'approssimazione così ottenuta è un'**approssimazione per difetto**

Illustriamo l'idea precedente con un disegno

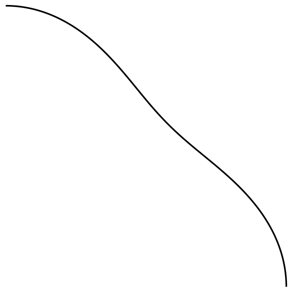


Figura: Il sostegno di una curva

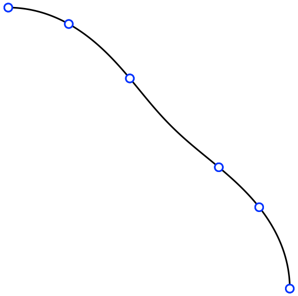


Figura: Selezioniamo alcuni punti $\gamma(t_i)$

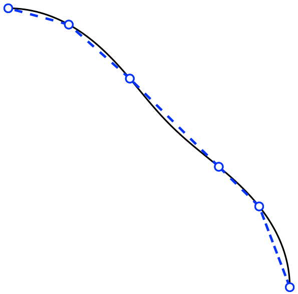


Figura: Connettiamo questi punti tramite segmenti e calcoliamo la lunghezza di questa spezzata (tratteggiata in blu). Tale lunghezza ci da un'approssimazione **per difetto** della lunghezza del sostegno della curva