Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA DEL 16 GENNAIO 2023 –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si determinino gli intervalli di monotonia della funzione* $f(x) = \arctan\sqrt{x - x^2}$

$$\textit{crescente su } \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad \textit{decrescente su } \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Esercizio 2. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = x \arctan x$ *nel punto* $(1, f(1))$.

$$y = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)(x-1)$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = x^2 \cos x$

$$F(x) = x^2 \sin x - 2\sin x + 2\,x\cos x$$

Esercizio 4. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2} - \sin x - 1}{\log(1 + x - x^2) - x} = -1$$

Esercizio 5. *Si calcolino*

$$\min_{x\in[0,1]} (x^3 - x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \qquad \max_{x\in[0,1]} (x^3 - x) = 0$$

Esercizio 6. *Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per* $x \to 0$

$$\boxed{x^3 = o(x)} \qquad \sin x - x \sim 0 \qquad e^x = o(1) \qquad \frac{(1-\cos x)\sin x}{x} \sim x^2 \qquad \boxed{\sqrt[10]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{10}x}$$

Esercizio 7. *Si dica quali tra le seguenti funzioni risultano crescenti sul proprio dominio di definizione*

$$f(x) = |x+1| \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad \boxed{h(x) = \sqrt{x}} \qquad \boxed{k(x) = \log(1 + \arctan x)}$$

Esercizio 8. *Si dica per quali valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la seguente serie risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha n}}{n!} \qquad \textit{per } \alpha < 1$$

Esercizio 9. *Si dia lo sviluppo di Taylor, centrato in* $x_0 = 0$ *all'ordine* 3 *con resto di Peano, della funzione seguente*

$$\frac{1}{1+\sin x} = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \textit{per } x \to 0$$

Esercizio 10. *Si dica quali tra le seguenti serie sono convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^3}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(77)^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^2 + \log n}{n^n} \qquad \textit{prima, terza e quarta}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Si calcoli il seguente integrale definito*

$$\int_0^1 \frac{1}{4+x+x^2}\, dx$$

Soluzione. Osserviamo che il denominatore è dato da un polinomio di secondo grado, privo di zeri. Infatti, si ha

$$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0.$$

Scriviamo quindi il denominatore come

$$4 + x + x^2 = 4 - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 = \frac{15}{4} + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2.$$

Usando questa scrittura, abbiamo allora

$$\int_0^1 \frac{1}{4+x+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{15}{4} + \left(\frac{1}{2}+x\right)^2}\, dx = \frac{4}{15}\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)^2}\, dx.$$

Operiamo il cambio di variabile

$$\frac{2}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{2}+x\right) = t,$$

da cui

$$dx = \frac{\sqrt{15}}{2}\, dt,$$

ed il nuovo intervallo di integrazione diventa $[1\sqrt{15}, 3/\sqrt{15}]$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{4+x+x^2}\, dx &= \frac{4}{15}\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)^2}\, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}}\int_{\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{3}{\sqrt{15}}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{15}}\left(\arctan\frac{3}{\sqrt{15}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\right).\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (8 punti)**.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = e^{\left|\frac{x-1}{x+2}\right|}.$$

(1) *Si determini il dominio di definizione D di f;*

(2) *si dica se f è pari, dispari o nessuna delle due;*

(3) *si calcolino i limiti di f nei punti di accumulazione di D, che non appartengono a D;*

(4) *si trovino eventuali asintoti orizzontali o verticali;*

(5) *si determini l'insieme D' in cui f è derivabile;*

(6) *si determinino gli intervalli di monotonia di f;*

(7) *si calcolino i limiti di f' nei punti di $D \setminus D'$;*

(8) *si trovino eventuali punti di massimo o minimo locale o assoluto di f.*

Si tracci infine il grafico di f.

Soluzione. Cominciamo innanzitutto discutendo il segno della quantità

$$\frac{x-1}{x+2},$$

definita per $x \neq -2$. Si osservi che essa è maggiore o uguale a 0 quando numeratore e denominatore hanno segno concorde. Quindi

$$\text{(1)} \qquad \frac{x-1}{x+2} \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty).$$

Procediamo adesso a svolgere l'esercizio, punto per punto.

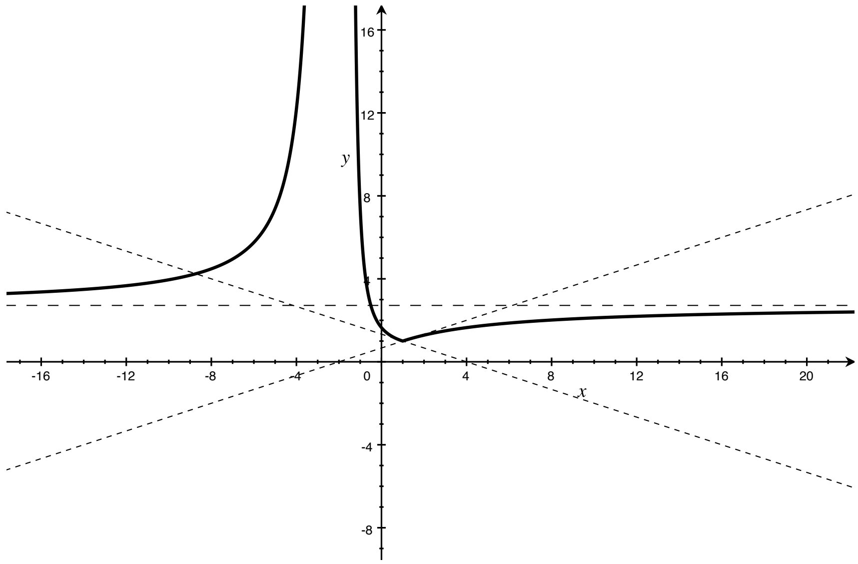

FIGURE 1. La funzione dell'Esercizio 12: in tratteggio continuo il grafico di f; la linea orizzontale tratteggiata rappresenta l'asintotico orizzontale $y = e$; le due rette tratteggiate oblique rappresentano le due rette tangenti "limite", in corrispondenza del punto angoloso $x = 1$.

(1) Si vede facilmente che $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Bisogna escludere $x = -2$, che è il valore per cui il denominatore dell'esponente si annulls;

(2) la funzione non è ne' pari e ne' dispari, come si vede osservando che il dominio D non è simmetrico rispetto all'origine;

(3) si ha
$$\lim_{x \to -2} e^{\left|\frac{x-1}{x+2}\right|} = +\infty$$
e
$$\lim_{x \to +\infty} e^{\left|\frac{x-1}{x+2}\right|} = \lim_{x \to -\infty} e^{\left|\frac{x-1}{x+2}\right|} = e;$$

(4) in particolare, la retta $y = e$ è un asintoto orizzontale per la funzione in esame, mentre $x = -2$ è un asintotico verticale;

(5) le funzioni esponenziali sono derivabili su tutto il loro dominio di definizione, così come la funzione
$$\frac{x-1}{x+2}.$$
La funzione in esame tuttavia contiene anche il valore assoluto, che è non derivabile quando il suo argomento si annulla. Abbiamo allora che f è non derivabile nei punti in cui
$$\frac{x-1}{x+2} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad x = 1.$$
Abbiamo allora che $D' = D \setminus \{1\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ è il dominio di derivabilità di f;

(6) pe calcolare gli intervalli di monotonia di f, usiamo il *test di monotonia*. Dobbiamo innanzitutto calcolare la derivata di f: ricordando lo studio del segno (1), si ha
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+2}}, & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty), \\ e^{\frac{1-x}{x+2}}, & \text{se } x \in (-2, 1]. \end{cases}$$
Abbiamo allora per $x \neq 1$
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{(x+2)^2}\, e^{\frac{x-1}{x+2}}, & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty), \\ \\ \frac{-3}{(x+2)^2}\, e^{\frac{1-x}{x+2}}, & \text{se } x \in (-2, 1). \end{cases}$$
Si osservi in particolare che
$$f'(x) > 0, \qquad \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty),$$
quindi f è (strettamente) crescente separatamente su ognuno di questi due intervalli. Sull'intervallo $(-2, -1)$ invece f risulta (strettamente) decrescente;

(7) dobbiamo calcolare il limite di f' per x che tende a 1: è facile vedere che tale limite non esiste, calcoliamo separatamente limite destro e limite sinistro. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3}{(x+2)^2} \, e^{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-3}{(x+2)^2} \, e^{\frac{1-x}{x+2}} = -\frac{1}{3}.$$

Il punto $x = 1$ è quindi un *punto angoloso*;

(8) dal punto (3), sappiamo sicuramente che la funzione non è limitata superiormente, quindi non può avere massimi assoluti. Lo studio degli intervalli di monotonia, evidenzia anche che non ci sono massimi locali, mentre $x = 1$ è un minimo locale. Resta da osservare che

$$e^{\left| \frac{x-1}{x+2} \right|} \geq e^0 = 1,$$

e che il valore 1 viene raggiunto quando l'argomento dell'esponenziale si annulla, ovvero per $x = 1$. Questo dimostra che $x = 1$ è in realtà (unico!) punto di minimo assoluto per f e si ha

$$\min_{x \in D} f(x) = 1.$$

Questo conclude lo studio della funzione.

□