Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A
– PROVA SCRITTA DEL 17 GENNAIO 2022 –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2021/2022

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si dica per quali valori del parametro α la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[e^{n^\alpha}-\frac{1}{1-n^\alpha}\right] \qquad \alpha<-\frac{1}{2}$$

Esercizio 2. *Si trovino le soluzioni dell'equazione trigonometrica* $\cos(3\,x+1)=\cos x$

$$x=-\frac{1}{2}+k\,\pi \qquad e \qquad x=-\frac{1}{4}+\frac{k\,\pi}{2} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

Esercizio 3. *Si trovino il massimo ed il minimo della funzione $f(x)=x^3-3\,x$ sull'intervallo* $[0,2]$

$$\max_{x\in[0,2]} f(x)=2 \qquad\qquad \min_{x\in[0,2]} f(x)=-2 \quad (\text{ per } x=1)$$

Esercizio 4. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\log(1+x-x^2)}{e^{x-x^2}-1-\sin x}=-3$$

Esercizio 5. *Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per $x\to 0$*

$$x^3=o(x^4) \qquad x^2+1\sim x^2 \qquad \boxed{x^2+x\sim x} \qquad \frac{x-\sin x}{x}\sim 0 \qquad \boxed{1-\cos x\sim\frac{e^{x^2}-1}{2}}$$

Esercizio 6. *Si calcoli il seguente limite di successione*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+7\,n}{n^2+1}\right)^n=e^7$$

Esercizio 7. *Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=1/\arctan x$ nel punto* $(1,f(1))$

$$y=\frac{4}{\pi}-\frac{8}{\pi^2}\,(x-1)$$

Esercizio 8. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in $x=0$ con resto di Peano della funzione*

$$\log(1+x+x^3)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\,x^3+o(x^3)$$

Esercizio 9. *Si dica quali tra le seguenti serie sono convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\,n)!}{(3\,n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n!}\,\tan\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-n^2+n}{n^4+3\,n^2+1}$$ *prima, seconda e terza*

Esercizio 10. *Si trovi una primitiva F della funzione* $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

$$F(x)=-\frac{1+x}{e^x}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (8 punti)**.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$$

avendo cura di tracciarne un grafico quanto più preciso possibile. Si presti particolare attenzione al dominio di derivabilità di tale funzione, identificando eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento. Determiniamo innanzitutto il dominio di definizione D di f. Come prima cosa, notiamo che f contiene $\sqrt{x}$: dovremo quindi imporre

$$x \geq 0.$$

Allo stesso modo, dobbiamo richiedere che risulti $x \neq 1$. Quindi per il momento sappiamo che

$$D \subset [0,1) \cup (1,+\infty).$$

Ricordiamo adesso che la funzione arcoseno è definita soltanto sull'intervallo $[0,1]$, dobbiamo determinare tutti i valori di $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ per cui

$$-1 \leq \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq 1.$$

Dovremo risolvere separatamente le due disequazioni

$$\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq \frac{\sqrt{x}}{x-1},$$

e poi **prendere l'intersezione** tra i due insiemi di soluzioni (perché vogliamo che entrambe le condizioni valgono conteporaneamente). Ricordiamoci che ci siamo già ristretti a considerare soltanto $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$.

- Troviamo tutti gli $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ tali che

(1)
$$\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq 1.$$

Partiamo osservando che se $x \in [0,1)$, la frazione a sinistra ha segno negativo e quindi la disequazione sarà sempre soddisfatta. Prendiamo quindi $x > 1$: in tal caso, si ha

$$\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x} \leq x-1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq (x-1)^2.$$

L'ultima disequazione, può essere riscritta come

$$x^2 - 3\,x + 1 \geq 0.$$

Quest'ultima è vera se e soltanto se

$$x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{oppure} \qquad x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ricordiamoci però che questa discussione è valida, sotto l'ipotesi $x > 1$. Dal momento che

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{3-\sqrt{4}}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2},$$

la seconda condizione va scartata e dobbiamo quindi tenere buona solo la prima, cioè

$$x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Riassumendo, abbiamo che (1) è vera per

$$x \in [0,1) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

- Troviamo adesso tutti gli $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ tali che

(2)
$$\frac{\sqrt{x}}{x-1} \geq -1.$$

Partiamo osservando che se $x \in (1,+\infty)$, la frazione a sinistra ha segno positivo e quindi la disequazione sarà sempre soddisfatta. Prendiamo quindi $x \in [0,1)$: in tal caso, si ha

$$\frac{\sqrt{x}}{x-1} \geq -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{x}}{1-x} \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x} \leq 1-x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq (1-x)^2.$$

Come prima, l'ultima disequazione, può essere riscritta come

$$x^2 - 3\,x + 1 \geq 0,$$

Come visto sopra, questa è vera se e soltanto se

$$x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{oppure} \qquad x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ricordiamoci però che questa discussione è valida, sotto l'ipotesi $x \in [0,1)$. Dal momento che

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{3-\sqrt{5}}{2} > \frac{3-\sqrt{9}}{2} = 0,$$

stavolta à la prima condizione va scartata e dobbiamo quindi tenere buona solo la seconda, cioè

$$x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Riassumendo, abbiamo che (2) è vera per

$$x \in \left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup (1,+\infty).$$

Abbiamo infine determinato il dominio di definizione di f: per quanto detto sopra, esso è infatti dato da

$$D = \left([0,1) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)\right) \cap \left(\left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup (1,+\infty)\right),$$

ovvero da

$$D = \left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

In altre parole, $f(x)$ risulta essere definita soltanto per

$$0 \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq x.$$

Sul proprio dominio di definizione, la funzione f risulta continua in quanto ottenuti tramite composizione ed operazioni elementari di funzioni continue. In particolare, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \arcsin(0) = 0,$$

$$\lim_{x\to \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^-} f(x) = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre, utilizzando che

$$\sqrt{x} = o(x), \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0,$$

quindi la funzione ha la retta $y = 0$ come asintotico orizzontale.

Vediamo che segno assume la funzione f: ricordando che l'arcoseno è positivo se e soltanto il suo argomento è compreso tra 0 e 1, si ottiene che

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{per } x \in \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right),$$

ed è negativa altrimenti.

Passiamo adesso ad analizzare gli intervalli di monotonia: osserviamo innanzitutto che la funzione f è derivabile nell'insieme

$$D' = \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Si osservi che abbiamo escluso $x = 0$ (perché in tal punto la funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ non è derivabile) ed i punti

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

perché in questi due punti l'argomento dell'arcsin vale 1 e -1 e sappiamo che tale funzione non è derivabile in tal caso. Il comportamento della derivata in questi 3 punti andrà analizzato separatemente.

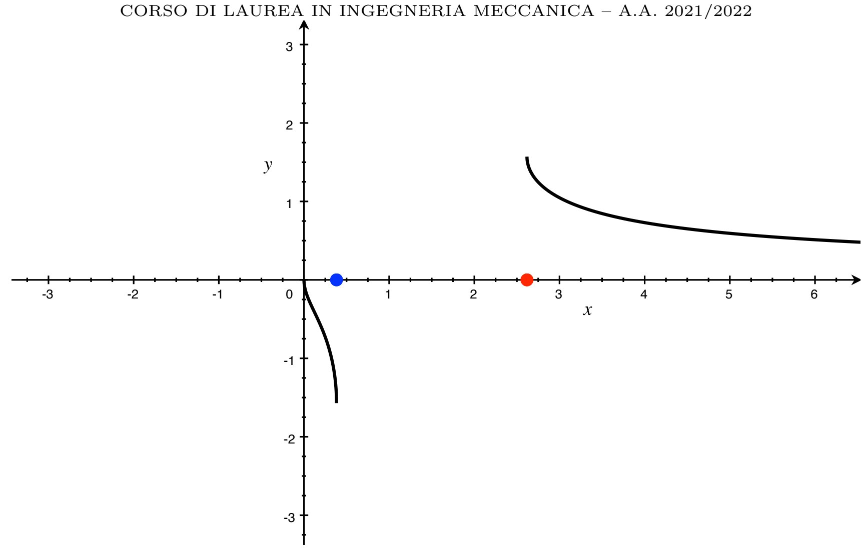

FIGURE 1. In blu il punto di minimo, in rosso il punto di massimo. Si noti che la funzione è definita su due intervalli disgiunti ed è monotona decrescente su ognuno dei due intervalli.

Per ogni $x \in D'$, la derivata di f è data da

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{(x-1)^2}}}\,\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{x}}{x-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{(x-1)^2}}}\left[\frac{1}{2\,(x-1)\,\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}\right] \\
&= \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-3\,x+1}}\,\frac{(x-1)-2\,x}{2\,(x-1)^2\sqrt{x}} \\
&\leq -\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-3\,x+1}}\,\frac{3\,x+1}{2\,(x-1)^2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che tale espressione è negativa per ogni $x \in D'$, quindi in base al Test di Monotonia, la funzione f risulta (strettamente) monotona decrescente su ogni intervallo che compone il dominio D'. In base alla discussione fatta fin'ora, si ha quindi che f ammette massimo e minimo su D, dati da

$$\inf_D f = \min_D f = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\sup_D f = \max_D f = f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Infine, per analizzare la natura dei punti di non derivabilità

$$x = 0 \qquad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

dobbiamo calcolare il limite di f' per x tendente a questi 3 punti. Osservando che tutti e 3 i punti annullano il denominatore della derivata, si vede che in tutti e 3 i casi questi limiti fanno $-\infty$, si tratta quindi di 3 punti a tangente verticale.

Infine, tracciamo il grafico della funzione in esame. □

Esercizio 12 (6 punti)**.** *Si trovi una primitiva della funzione*

$$f(x) = \frac{x^5+2}{x^4\,+2\,x^2}$$

precisandone il dominio di definizione.

Proof. Osserviamo innanzitutto che la funzione f è definita per $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, cerchiamone una primitiva su questo insieme. Trattandosi di una funzione razionale, possiamo utilizzare l'apposito algoritmo: osserviamo innanzitutto che il grado del polinomio al numeratore è maggiore di quello a denominatore. Eseguiamo quindi la divisione tra polinomi

$$\begin{array}{ccc|c} x^5 & & +2 & x^4+2\,x^2 \\ \cline{4-4} x^5 & +2\,x^3 & & x \\ \hline 0 & -2\,x^3 & +2 & \end{array}$$

quindi si ha

$$f(x) = \frac{x^5+2}{x^4\ +2\,x^2} = \frac{x\,(x^4+2\,x^2)-2\,x^3+2}{x^4+2\,x^2} = x + \frac{-2\,x^3+2}{x^4+2\,x^2}.$$

Abbiamo quindi in prima battuta

$$\int \frac{x^5+2}{x^4\ +2\,x^2}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{-2\,x^3+2}{x^4+2\,x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2\,x^3+2}{x^4+2\,x^2}\,dx.$$

Per calcolare l'ultima primitiva, proseguiamo con l'algoritmo (notare che ci siamo ridotti alla situazione in cui il grado del polinomio al numeratore è strettamente minore di quello a denominatore): decomponiamo il denominatore in polinomi irriducibili come

$$x^4+2\,x^2 = x^2\,(x^2+2),$$

ed osserviamo che il denominatore si annulla quindi soltanto per $x=0$ (radice doppia). Dobbiamo quindi cercare quattro coefficienti $A,B,C,D \in \mathbb{R}$ per cui valga la Decomposizione in Fratti Semplici

$$\frac{-2\,x^3+2}{x^4+2\,x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C\,x+D}{x^2+2}.$$

I coefficienti cercati devono quindi risolvere il seguente lineare 4×4

$$\begin{cases} A+C &= \quad -2 \\ B+D &= \quad 0 \\ 2\,A &= \quad 0 \\ 2\,B &= \quad 2. \end{cases}$$

Si vede facilmente (partendo dalle ultime due equazioni) che l'unica soluzione è data da

$$A=0 \qquad B=1 \qquad C=-2 \qquad D=-1.$$

Otteniamo quindi

$$\frac{-2\,x^3+2}{x^4+2\,x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2\,x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+2},$$

da cui quindi

$$\int \frac{-2\,x^3+2}{x^4+2\,x^2}\,dx = -\frac{1}{x} - \log(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

In conclusione, una primitiva di f sul dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è data da

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \log(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$