

Nome, Cognome .....

Matricola .....

**ANALISI MATEMATICA A**  
**– PROVA SCRITTA DEL 21 FEBBRAIO 2022 –**

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2021/2022

**Libri, appunti e calcolatrici non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

**Esercizio 1.** Si dica per quali valori del parametro  $\alpha$  la serie seguente risulta convergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \left( \frac{n^\alpha + 2n + 1}{n^\alpha} \right) \quad \alpha > 2$$

**Esercizio 2.** Si trovino le soluzioni dell'equazione logaritmica  $\log_2(x+1) = \log_4(x+2)$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

**Esercizio 3.** Si trovino sup ed inf della funzione  $f(x) = \frac{1}{x} - \log \frac{1}{x}$  sull'intervallo  $(0, 2]$

$$\sup_{x \in (0, 2]} f(x) = +\infty \quad \inf_{x \in (0, 2]} f(x) = f(1) = 1$$

**Esercizio 4.** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin(x + x^3) - x} = \frac{2}{5}$$

**Esercizio 5.** Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per  $x \rightarrow +\infty$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim 0 \quad \boxed{x^2 + 1 \sim x^2} \quad x^2 + x \sim x \quad e^x = o(x^{1000}) \quad \boxed{\frac{\sin x}{x} = o(1)}$$

**Esercizio 6.** Si calcoli il seguente limite di successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{2n+1} = \frac{1}{e^4}$$

**Esercizio 7.** Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = \arctan(1/x)$  nel punto  $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$

$$y = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}(x - \sqrt{3})$$

**Esercizio 8.** Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in  $x = 0$  con resto di Peano della funzione

$$\frac{1}{1+x+x^3} = 1 - x + x^2 - 2x^3 + o(x^3)$$

**Esercizio 9.** Si dica quali tra le seguenti serie sono convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tan \left( \frac{1}{n} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \log(n^2 + 1) - 2 \log n \right] \text{ prima e quarta}$$

**Esercizio 10.** Si trovi una primitiva  $F$  della funzione  $f(x) = \cos^2 x$

$$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

**Esercizio 11** (8 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x+2|} - x.$$

- (1) Si determini il dominio  $D$  di  $f$  e se ne discuta l'eventuale continuità;
- (2) si dica, giustificando la risposta, se si tratta di una funzione pari, dispari o nessuna delle due;
- (3) si determinino gli insiemi  $\{x \in D : f(x) > 0\}$ ,  $\{x \in D : f(x) < 0\}$  e  $\{x \in D : f(x) = 0\}$ ;
- (4) si calcolino i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

ed i limiti in altri eventuali punti di accumulazione di  $D$ , che non fanno parte di  $D$  stesso;

- (5) si determinino gli intervalli di monotonia della funzione  $f$ ;
- (6) si determinino

$$\sup_{x \in D} f(x) \quad \text{e} \quad \inf_{x \in D} f(x),$$

e si trovino eventuali massimi/minimi locali;

Si trovino inoltre eventuali asintoti obliqui e si presti particolare attenzione al dominio di derivabilità di tale funzione, identificando eventuali punti di non derivabilità.

Infine, si tracci un grafico quanto più preciso possibile della funzione  $f$ .

**Esercizio 12** (6 punti). Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si trovi una primitiva della funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{1 + \alpha x + x^2},$$

quando

- $-2 < \alpha < 2$ ;
- $\alpha = 4$ ;
- $\alpha = 2$ .

Si precisi il dominio di definizione delle primitive trovate.