FAC-SIMILE DI COMPITO DI ANALISI 1

PRIMA PARTE

Lo studente scriva solo la risposta direttamente su questo foglio.

La seconda parte verrà corretta esclusivamente nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.

Esercizio 1. *Trovare l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione* $\sin^2(x/2) = \cos x$

$$\mathcal{S} = \left\{\arccos\frac{1}{3} + 2\,k\,\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\arccos\frac{1}{3} + 2\,k\,\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Esercizio 2. *Calcolare il limite della successione*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2\,n} + e^{-2\,n}}{2} \sin\left(\log\left(\cos\left(\frac{1}{e^n}\right)\right)\right) = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 3. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 2} \frac{\tan^5(\log(x-1))}{(x-2)^4\,\sin(x^2-4)} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 4. *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{(\log n)^{100}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n^2}}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 5. *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie a termini positivi è convergente*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\log^\alpha n} \qquad \alpha > 1 \quad \textit{(usare Criterio di condensazione di Cauchy)}$$

Esercizio 6. *Trovare una primitiva F su $(0, +\infty)$ della funzione $x \mapsto \log x^2$.*

$$F = x\,(\log x^2 - 2)$$

Esercizio 7. *Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^8} - 1 - \sin\left(\dfrac{x^8}{2}\right)}{e^{x^4} - 2 + \cos x^4 - \sin x^4} = 0$$

Esercizio 8. *Si determinino*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \log(2 + \sin x) = \log 3 \qquad \min_{x\in\mathbb{R}} \log(2 + \sin x) = 0$$

Esercizio 9. *Dare lo sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *con resto di Peano nel punto $x_0 = 0$ per la funzione*

$$\frac{1}{1 - x^2 - x} = 1 + x + 2\,x^2 + 3\,x^3$$

Esercizio 10. *Trovare i* 3 *punti di flesso x_0, x_1 e x_2 della funzione $x \mapsto x\,e^{-x^2}$*

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte non verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (6 punti)**.** *Si studi la funzione*

$$x \mapsto \frac{x^2 + |x| + 1}{x + 1}$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.

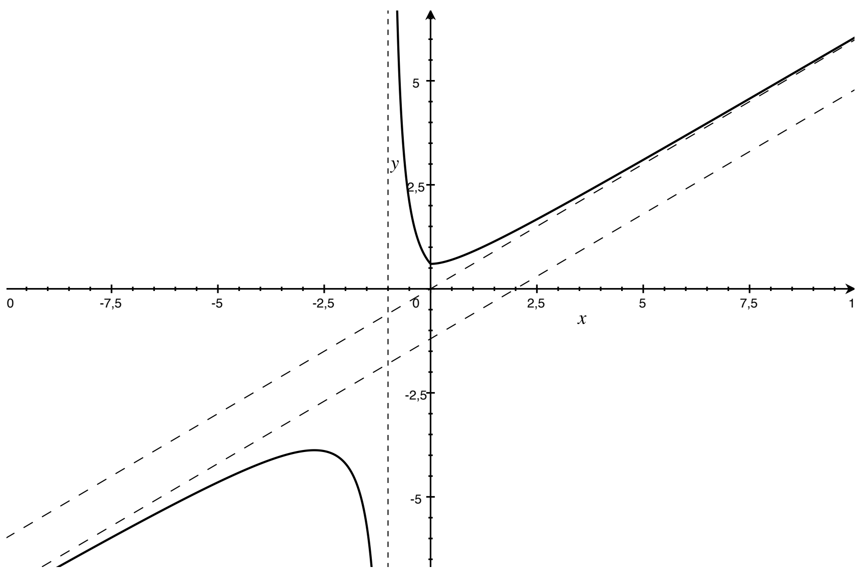

FIGURE 1. La funzione è convessa per $x > -1$ e concava per $x < -1$, ha asintoti obliqui $y = x$ e $y = x - 2$ e asintoto verticale $x = -1$. In $x = 0$ c'è un punto angoloso, con derivata sinistra -2 e derivata destra 0.

Esercizio 12 (6 punti)**.** *Si studino gli intervalli di monotonia della funzione (2 punti)*

$$x \mapsto \frac{e^x\,(e^x - 1)}{e^{2\,x} + e^x + 1},$$

e se ne calcoli una primitiva (4 punti).

Fare il cambio di variabile $e^x = t$, l'integrale diventa

$$\int \frac{e^x\,(e^x - 1)}{e^{2\,x} + e^x + 1}\,dx = \int \frac{t - 1}{t^2 + t + 1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2\,t + 1}{t^2 + t + 1}\,dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2 + t + 1}\,dt$$