FAC-SIMILE DI COMPITO DI ANALISI 1

Prima parte

Lo studente scriva solo la risposta direttamente su questo foglio.

La seconda parte verrà corretta esclusivamente nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.

Esercizio 1. *Trovare l'insieme* $\mathcal{S}$ *di* **tutte** *le soluzioni* $x \in \mathbb{R}$ *dell'equazione* $\sin x = \cos(2\,x)$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Esercizio 2. *Calcolare il limite della successione*

$$\lim_{n\to\infty} \sinh\left(e^{-n^2-n}\right) \frac{n^2\,\log n}{n^2-1} = 0$$

Esercizio 3. *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log x + \log^2 x} - \log x}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = +\infty$$

Esercizio 4. *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2-n} - 1\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,\log_2 n)}{n^{1.1}} \qquad \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n\,\log\log n}$$

Esercizio 5. *Dire per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la seguente serie a termini positivi è convergente*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n^{\alpha^2}}}{n!} \qquad |\alpha| < 1$$

Esercizio 6. *Trovare una primitiva* F *su* $\mathbb{R}$ *della funzione* $x \mapsto x\,\arctan x$.

$$F = \frac{x^2}{2}\,\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\arctan x$$

Esercizio 7. *Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^4}{1-x^4} - \sin(x^4) + 1 - e^{x^8}}{1-\cos(x^6)} = \frac{7}{3}$$

Esercizio 8. *Si determinino i punti di massimo e minimo della funzione* $x \mapsto \arccos(|2\,x^2 - 1|)$ *sull'intervallo* $[-1, 1]$

punti di minimo $= \{-1, 0, 1\}$ $\qquad$ *punti di massimo* $= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Esercizio 9. *Dare lo sviluppo di Taylor all'ordine* 2 *con resto di Peano nel punto* $x_0 = 0$ *per la funzione*

$$\sqrt{1 + x^2 + x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\,x^2 + o(x^2)$$

Esercizio 10. *Trovare i* 2 *punti di flesso* x_0 *e* x_1 *della funzione* $x \mapsto \arctan(x^2)$

$$x_0 = -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \qquad x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte non verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (6 punti)**.** *Si studi la funzione*

$$x \mapsto \int_1^x \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso.

Soluzione. Consideriamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt$$

Osserviamo che la funzione

$$x \mapsto f(x) = \log\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)$$

è ben definita e continua se

$$\frac{x^2+x}{x^2+1} > 0$$

ovvero se

$$x\,(x+1) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < -1 \quad \text{e} \quad x > 0.$$

Di conseguenza, la funzione f è integrabile su tutti gli intervalli della forma

$$[-L, -1-\varepsilon] \qquad \text{e} \qquad [\varepsilon, L],$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e $L > 0$.

La funzione integrale F è quindi ben definita per $x > 0$ e **per definizione** rappresenta l'unica primitiva su $(0, +\infty)$ della funzione

$$x \mapsto \log\left(\frac{x^2+t}{x^2+1}\right),$$

che si annulla in 1.

1. Segno. Osserviamo che per $x > 0$ si ha

$$\log\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^2+x}{x^2+1} \geq 1$$
$$\Longleftrightarrow \qquad x \geq 1$$

Abbiamo quindi[1]

$$F(x) \geq 0 \qquad \text{per } x \geq 1$$

e

$$F(x) < 0 \qquad \text{per } 0 < x < 1.$$

2. Limiti. Dobbiamo determinare i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt,$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} \int_1^x \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt,$$

ovvero dobbiamo stabilire se la funzione integranda f è integrabile in senso generalizzato su $[0, 1]$ e $[1, +\infty)$, rispettivamente. Cominciamo dal primo limite: osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt = -\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt,$$

[1] Per $x \geq 1$, l'integrando f abbiamo visto essere una funzione positiva. La funzione F rappresenta quindi l'area del sottografico di f sull'intervallo $[1, x]$ ed è pertanto positiva.

ed osserviamo che[2]

$$\log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) \sim \log t \qquad \text{per } t \to 0^+.$$

La funzione $t \mapsto \log t$ è integrabile su $[0,1]$, quindi dal criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri si ottiene che anche la nostra funzione è integrabile. Abbiamo quindi

$$\ell_0 = \lim_{x\to 0^+} \int_1^x \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt < +\infty.$$

Per l'altro limite, si osserva che

$$\log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) = \log\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right) \sim \frac{t-1}{t^2+1} \sim \frac{1}{t} \qquad \text{per } t \to +\infty.$$

L'ultima funzione non è integrabile su $[1,+\infty)$, quindi di nuovo per il criterio del confronto asintotico si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right) dt = +\infty.$$

□

Esercizio 12 (6 punti)**.** *Si dimostrino le formule di duplicazione per il coseno e seno iperbolici, ovvero si dimostri che (1 punto)*

$$\cosh^2 t = \frac{1+\cosh 2t}{2} \qquad \sinh^2 t = \frac{\cosh 2t - 1}{2}.$$

Si calcoli in seguito l'integrale definito (5 punti)

$$\int_0^{\frac{e^2-1}{e}} (4+x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

Soluzione. Fare il cambio di variabile $x = 2\sinh t$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 (4+4\sinh^2 t)^{\frac{3}{2}} \cosh t\, dx &= 16\int_0^1 \cosh^4 t\, dt \\
&= 16\int_0^1 (\cosh^2 t)^2\, dt \\
&= 16\int_0^1 \left(\frac{1+\cosh 2t}{2}\right)^2 dt \\
&= 16\int_0^1 \frac{1+\cosh^2 2t + 2\cosh 2t}{4}\, dt \\
&= 16\int_0^1 \frac{1+2\cosh 2t}{4}\, dt + 4\int_0^1 \cosh^2 2t\, dt \\
&= 16\left[\frac{t}{4} + \frac{\sinh 2t}{4}\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{1+\cosh 4t}{2}\, dt \\
&= 4 + 4\sinh 2 + 4\left[\frac{t}{2} + \frac{\sinh 4t}{8}\right]_0^1 \\
&= 6 + 4\sinh 2 + \frac{1}{2}\sinh 4.
\end{aligned}$$

□

[2]Si usi il Teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{t^2+t}{t^2+1}\right)}{\log t}.$$