

ANALISI MATEMATICA
– PROVA PARZIALE I SEMESTRE –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Trovare l'insieme \mathcal{S} di **tutte** le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $\cos x = \sin(2x)$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Esercizio 2. Calcolare il limite della successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(e^{-\sqrt{n}}\right) \frac{n e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n!}} = 0$$

Esercizio 3. Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin(4x^2)} = -\frac{1}{8}$$

Esercizio 4. Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{999}{1000} \right)^n \quad \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log \log n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(e^{-n})$$

Esercizio 5. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie a termini positivi è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^{2n} \quad \text{per } |\alpha| < 1$$

Esercizio 6. Trovare una primitiva F su $(-2, +\infty)$ della funzione $x \mapsto \log(2+x)$

$$F = (x+2) \log(x+2) - x$$

Esercizio 7. Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1-x^4} - \sin(x^4) + 1 - 2e^{x^8}}{\sqrt{1+2x^8} - 1} = -1$$

Esercizio 8. Dare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 con resto di Peano nel punto $x_0 = 0$ per la funzione

$$\log(1+x^2+x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Esercizio 9. Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $x \mapsto \arctan(x^3 - x)$ nel punto di coordinate $(1, 0)$

$$y = 2(x-1)$$

Esercizio 10. Trovare i 2 punti di flesso x_0 e x_1 della funzione $x \mapsto \log(1+4x^2)$

$$x_0 = -\frac{1}{2} \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte non verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Si studi la funzione integrale

$$x \mapsto \int_0^x e^{\arctan |t|} dt$$

tracciandone un grafico qualitativo quanto più possibile preciso. Si discuta in particolare se la funzione ha asintoti obliqui (domanda bonus, 2 punti aggiuntivi).

Soluzione. La funzione $t \mapsto e^{\arctan |t|}$ è definita e continua su tutto \mathbb{R} , quindi la funzione integrale esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che la funzione integranda è pari, quindi

$$F(x) = \int_0^x e^{\arctan |t|} dt,$$

è dispari. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{\arctan |t|} dt \stackrel{t=-s}{=} - \int_0^x e^{\arctan |s|} ds = -F(x).$$

Osserviamo anche che essendo l'integrando positivo, si ha

$$F(x) \geq 0, \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

Occupiamoci adesso di calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{\arctan |t|} dt.$$

Osserviamo che per $t \geq 0$, la funzione $t \mapsto e^{\arctan |t|}$ è monotona crescente. Si ha quindi

$$e^{\arctan |t|} \geq e^{\arctan 1} = e^{\frac{\pi}{4}}, \quad \text{per } t \geq 1.$$

La funzione positiva e costante $t \mapsto e^{\pi/4}$ non è integrabile per $t \geq 1$, per il criterio del confronto si ha quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{\arctan |t|} dt \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x e^{\arctan |t|} dt \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x e^{\frac{\pi}{4}} dt = +\infty,$$

quindi F diverge all'infinito¹. Studiamo gli intervalli di monotonia adesso: per definizione, si ha

$$F'(x) = e^{\arctan |x|}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

L'ultima funzione è strettamente positiva, quindi otteniamo che F è strettamente crescente. Infine, osserviamo che F' è a sua volta derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e (si ricordi che F è dispari, quindi basta studiare il segno di F'' per $x > 0$)

$$F''(x) = e^{\arctan x} \frac{1}{1+x^2} > 0, \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Quindi F è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$. □

¹Discussione da 2 punti bonus. Più precisamente, la funzione ha crescita lineare all'infinito, infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{\text{H\^opital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\arctan |x|} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Tuttavia, la funzione F non ha un asintoto obliquo all'infinito. Infatti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - e^{\frac{\pi}{2}} x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x [e^{\arctan t} - e^{\frac{\pi}{2}}] dt = e^{\frac{\pi}{2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x [e^{\arctan t - \frac{\pi}{2}} - 1] dt.$$

Per discutere la convergenza dell'ultimo integrale, si osservi che la funzione da integrare ha segno costante e risulta

$$\arctan t - \frac{\pi}{2} = -\arctan \frac{1}{t},$$

da cui

$$e^{\arctan t - \frac{\pi}{2}} - 1 = e^{-\arctan \frac{1}{t}} - 1 \sim -\arctan \frac{1}{t} \sim -\frac{1}{t}, \quad \text{per } t \rightarrow +\infty.$$

L'ultima funzione non è integrabile su $[1, +\infty)$, quindi dal criterio del confronto asintotico per l'integrale improprio di funzioni a segno costante, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - e^{\frac{\pi}{2}} x] = -\infty$$

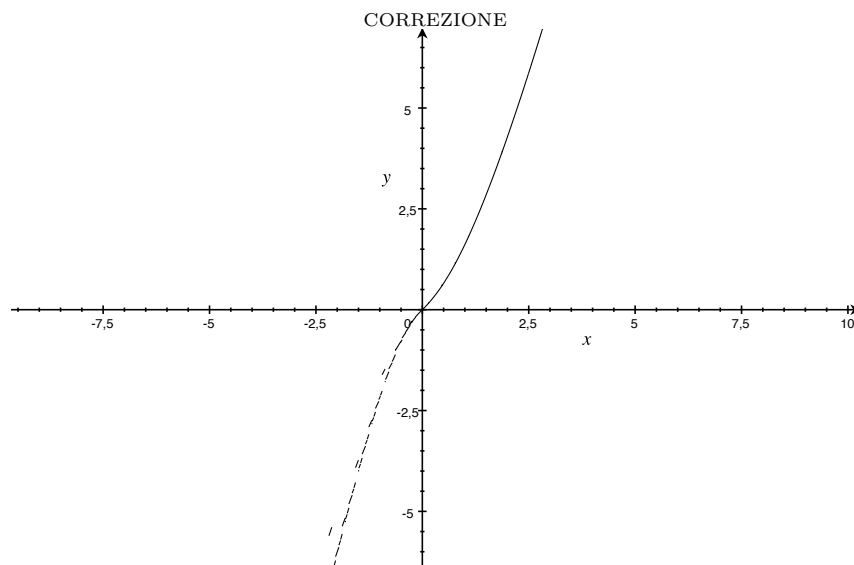


FIGURE 1. Il grafico della funzione integrale dell'Esercizio 11.

Esercizio 12 (7 punti). Si discuta il dominio di definizione e si calcoli una primitiva della seguente funzione razionale

$$x \mapsto \frac{x+1}{x^3+x^2+x}$$

Soluzione. Si osservi che

$$x^3+x^2+x = x(x^2+x+1),$$

ed il polinomio x^2+x+1 non ha radici reali. Il dominio di definizione della funzione è quindi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Facciamo adesso la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Si vede facilmente che si ha

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3+x^2+x} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^3+x^2+x} dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, \end{aligned}$$

per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

□