Nome, Cognome ....................................................

Matricola ...............................................................

**ANALISI MATEMATICA B**
**– PROVA SCRITTA –**

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

**Libri, appunti e calcolatrici non ammessi**

PRIMA PARTE

*- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.*

*- La seconda parte verrà corretta* **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

*- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.*

**Esercizio 1.** *Data la direzione* $\omega = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ *e la funzione* $f(x,y) = \arctan(x/y)$, *si calcoli*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1,-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Esercizio 2.** *Si dica quali tra i seguenti sono punti di minimo locale per la funzione* $f(x,y) = x^3 - y^3 + x\,y$

$$(0,0) \qquad (1,-1) \qquad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \qquad (0,1)$$

**Esercizio 3.** *Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali sono* <u>*solenoidali e irrotazionali*</u> *sul loro insieme di definizione*

$$\mathbf{F}(x,y) = (-y,x) \qquad \mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad \mathbf{F}(x,y) = (x,-1) \qquad \mathbf{F}(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$$

**Esercizio 4.** *Si trovi la curvatura* $\kappa_\gamma$ *della curva* $\gamma(t) = (\cos^4 t, \sin^4 t)$ *con* $t \in (0, \pi/2)$

$$\kappa_\gamma(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\cos^4 t + \sin^4\, t)^{\frac{3}{2}}}$$

**Esercizio 5.** *Si trovi il baricentro* $(\overline{x}, \overline{y})$ *del sostegno della curva* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ *con* $t \in [\pi/6, \pi/3]$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{6}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

**Esercizio 6.** *Sia* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}$, *si determinino*

$$\min_{(x,y)\in E}(x+y) = -\sqrt{2} \qquad \max_{(x,y)\in E}(x+y) = \sqrt{2}$$

**Esercizio 7.** *Si dica quali tra i seguenti limiti sono corretti*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x\,y)}{x^2} = 1$$

**Esercizio 8.** *Si calcoli il lavoro del campo di Biot-Savart* $\mathbf{F}_{BS}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ *lungo l'elica cilindrica* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ *con* $t \in [0, \pi/2]$

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma \rangle \, d\ell = \frac{\pi}{2}$$

**Esercizio 9.** *Sia* $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-x^2-y^2}$, *si determinino*

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \frac{1}{e} \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$$

**Esercizio 10.** *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di* $f(x,y) = e^x \log y$ *nel punto* $(1, 2, e\log 2)$

$$z = e\,\log 2 + e\,\log 2\,(x-1) + \frac{e}{2}\,(y-2)$$

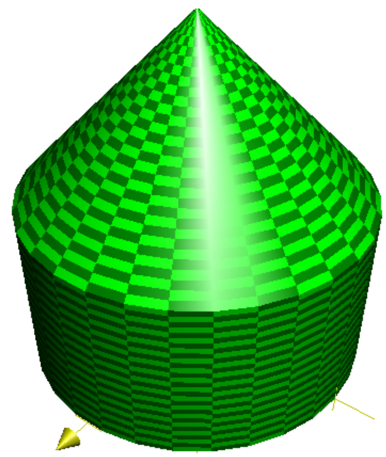

FIGURE 1. L'insieme $E$ dell'Esercizio 11.

SECONDA PARTE

*Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.*

*In questa parte* **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

**Esercizio 11** (7 punti)**.** *Si calcoli il momento di inerzia rispetto all'asse delle $z$ dell'insieme*

$$E = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

*Soluzione.* Dato $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la distanza dall'asse delle $z$ è data dalla quantità $\sqrt{x^2 + y^2}$. Dobbiamo quindi calcolare l'integrale triplo

$$I = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Osserviamo che $E$ è $z-$semplice, dal Teorema di Fubini abbiamo allora

$$I = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \iint_B \left( \int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) dx\, dy,$$

dove abbiamo posto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} I = \iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= \iint_B \left( \int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) (x^2 + y^2)\, dx\, dy \\ &= \iint_B (2 - \sqrt{x^2 + y^2})\, (x^2 + y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - \varrho)\, \varrho^2\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta, \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le coordinate polari nel piano. Si vede facilmente adesso che

$$I = 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}\, \pi,$$

concludendo così l'esercizio. □

**Esercizio 12** (8 punti)**.** *Sia* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *il campo vettoriale dato da*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -z, y)\,.$$

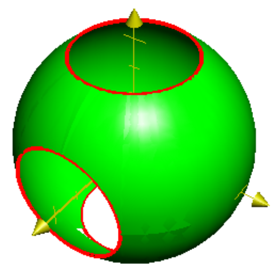

Figure 2. La superficie $S$ dell'Esercizio 12. In rosso, sono evidenziate le 3 curve che costituiscono il bordo di $S$, lungo cui calcoliamo il lavoro di $\mathbf{F}$, una volta che si applichi il Teorema di Stokes. Attenzione all'orientazione di queste 3 curve!

*Consideriamo i due sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\, |z| \le \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},$$

*e*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 1\} \setminus \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le \frac{1}{4}\right\}.$$

*Si calcoli:*

- *il flusso di* $\mathbf{F}$ *attraverso* $\partial V$*;*
- *il flusso di* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *attraverso* $S$.

*Si dica infine se i campi* $\mathbf{F}$ *e* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *sono conservativi, giustificando la risposta.*

*Soluzione.* Per calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\partial V$, possiamo usare il Teorema della Divergenza, ovvero

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial V}\rangle\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_V dx\, dy\, dz,$$

grazie al fatto che la divergenza di $\mathbf{F}$ vale constantemente 1. Si osservi adesso che l'insieme $V$ coincide con la palla di raggio 1 e centro $(0,0,0)$, da cui è stato rimosso un cilindro con asse di simmetria coincidedente con l'asse $z$, avente sezione di raggio $1/2$. In coordinate cilindriche, l'insieme $V$ si può descrivere tramite

$$x = \varrho\cos\vartheta, \qquad y = \varrho\sin\vartheta, \qquad z = z,$$

con

$$z \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \qquad \vartheta \in [0,2,\pi] \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} \le \varrho \le \sqrt{1-z^2}.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial V}\rangle\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-z^2}} \varrho\, d\varrho\right) dz\, d\vartheta \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{1-z^2}{2} - \frac{1}{8}\right] dz \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{1-z^2}{2} - \frac{1}{8}\right] dz.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente.

Veniamo adesso al flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso $S$. Si osservi che $S$ coincide con la sfera di raggio 1 e centro $(0,0,0)$, a cui sono stati praticati 3 fori di raggio $1/2$: due centrati sull'asse $z$ (in modo simmetrico rispetto all'origine) ed uno centrato sull'asse $x$, si veda la figura. Possiamo usare il Teorema di Stokes ed ottenere

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{N}_S \rangle \, d\sigma = \int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \, d\ell.$$

Ricordiamo che $\partial^+ S$ è il bordo di $S$, orientato positivamente in accordo con la scelta della normale $\mathbf{N}_S$. Il bordo di $S$ è costituito da 3 circonferenze, al fine di parametrizzarle in modo corretto, scegliamo innanzitutto un'orientazione per $\mathbf{N}_S$: prendiamo per esempio la normale "uscente" rispetto alla sfera.

Otteniamo quindi che la "circonferenza superiore" va percorsa in senso orario, ad esempio possiamo prendere

$$\gamma_1(t) = \left( \frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

la "circonferenza inferiore" va percorsa in senso antiorario

$$\gamma_2(t) = \left( \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

ed infine la "circonferenza verticale" va percorsa in senso orario attorno all'asse $x$, overo

$$\gamma_3(t) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t \right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Usando queste parametrizzazioni, otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{N}_S \rangle \, d\sigma = \int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \, d\ell &= \sum_{i=1}^{3} \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\gamma_i(t)), \gamma_i'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \cos t \\ -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \sin t \\ -1/2 \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt \\
&+ \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \cos t \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \sin t \\ 1/2 \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt \\
&+ \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \sin t \\ 1/2 \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \sin t \\ -1/2 \cos t \end{bmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{4} \cos t \sin t + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t \right] dt \\
&+ \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{4} \cos t \sin t + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t \right] dt \\
&- \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t] \, dt = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$