

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2019/2020

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 1, 2)$

$$z = 2x + 2y - 2$$

Esercizio 2. Si calcoli la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = \arccos(xy)$ nel punto $(1/2, 1/2)$ lungo la direzione $\omega = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1/2, 1/2) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$$

Esercizio 3. Si calcoli il momento d'inerzia dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ rispetto all'asse $x = 1/2$

$$M = \frac{1}{12}$$

Esercizio 4. Si calcolino il versore tangente \mathbf{T}_γ ed il versore normale \mathbf{N}_γ alla curva $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$

$$\mathbf{T}_\gamma(t) = \left(\frac{\cos t - t \sin t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{\sin t + t \cos t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \quad \mathbf{N}_\gamma(t) = \left(\frac{\sin t + t \cos t}{\sqrt{1+t^2}}, -\frac{\cos t - t \sin t}{\sqrt{1+t^2}} \right)$$

Esercizio 5. Si calcoli il lavoro del campo di Biot-Savart $\mathbf{F}_{BS}(x, y, z) = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2), 0)$ lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ con $t \in [0, \pi]$

$$L = \pi$$

Esercizio 6. Si trovi un potenziale U del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$

$$U(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

Esercizio 7. Si dia una superficie ϕ il cui sostegno coincida con l'insieme $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4\}$

$$\phi = (1 + 2 \cos \vartheta \sin \varphi, -1 + 2 \sin \vartheta \sin \varphi, 2 \cos \varphi), \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

Esercizio 8. Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 centrato in $(0, 0)$ con resto di Peano della funzione $f(x, y) = \cos(xy)$

$$f(x, y) = 1 + o(x^2 + y^2)$$

Esercizio 9. Si calcoli il limite seguente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy) - xy}{2x^2} = 0$$

Esercizio 10. Si dica quali tra i seguenti sono punti sella per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$

$$(1, 1) \quad \boxed{(0, 0)} \quad (1, 0) \quad (2, 3) \quad (0, -1)$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = x^3 - y + z$$

e sia

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Si trovino il massimo ed il minimo di f su E .

Soluzione. Notiamo innanzitutto che l'insieme E è chiuso e limitato (si tratta di una palla chiusa di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1) e la funzione f è ivi continua. Per il *Teorema di Weierstrass*, abbiamo dunque che f ammette sicuramente massimo e minimo su E .

Dal momento che f è una funzione almeno C^1 , usiamo il *Teorema di Fermat* per individuare eventuali punti di massimo o minimo interni ad E . Dal momento che

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2, -1, 1),$$

non si annulla mai, abbiamo che i punti cercati non si trovano all'interno di E .

Analizziamo quindi la situazione sulla frontiera

$$\partial E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Dal momento che $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ è una funzione C^1 e

$$\nabla G(x, y, z) \neq (0, 0, 0), \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \partial E,$$

si tratta di un vincolo regolare e possiamo quindi applicare il *Teorema dei moltiplicatori di Lagrange* per individuare i punti di massimo e minimo. Introduciamo quindi la variabile aggiuntiva λ e risolviamo il sistema non-lineare

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla G(x, y, z) \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 3x^2 & = & 2\lambda x \\ -1 & = & 2\lambda y \\ 1 & = & 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1. \end{cases}$$

Partiamo dalla prima equazione, per cui abbiamo due possibilità

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad x \neq 0 \text{ e } 3x = 2\lambda.$$

Nel primo caso, abbiamo dunque

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ -1 & = & 2\lambda y \\ 1 & = & 2\lambda z \\ y^2 + z^2 & = & 1. \end{cases}$$

e la seconda e la terza equazione ci dicono che deve aversi $y = -z$. Sostituendo nella quarta equazione, abbiamo allora

$$2y^2 = 1 \quad \text{ovvero} \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Abbiamo quindi trovato i punti

$$P_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Risolviamo adesso il sistema iniziale, per caso in cui $x \neq 0$ e $3x = 2\lambda$, ovvero

$$\begin{cases} 3x & = & 2\lambda \\ -1 & = & 2\lambda y \\ 1 & = & 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1. \end{cases}$$

Le prime tre equazioni ci dicono quindi che deve valere

$$(1) \quad y = -z \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{3x}.$$

Sostituendo nella quarta equazione, otteniamo allora

$$x^2 + \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{9x^2} = 1 \quad \iff \quad 9x^4 - 9x^2 + 2 = 0.$$

Ponendo $t = x^2$, si ottiene

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} = \frac{3 \pm 1}{6}.$$

da cui quindi

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Ricordando le relazioni (1), abbiamo quindi trovato i punti

$$P_3 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \quad P_4 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad P_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Valutiamo adesso f in corrispondenza di questi 6 punti, per determinare il massimo ed il minimo. Si ha

$$f(P_1) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad f(P_2) = -f(P_1) = \sqrt{2}$$

$$f(P_3) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad f(P_4) = -f(P_3) = -\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$f(P_5) = \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{3}} \quad f(P_6) = -f(P_5) = -\frac{7}{3\sqrt{3}}$$

Osservando che

$$\sqrt{2} > \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} > \frac{7}{3\sqrt{3}},$$

abbiamo dunque che P_2 è punto di massimo, P_1 è punti di minimo e

$$\max_E f = \sqrt{2} \quad \min_E f = -\sqrt{2}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti). Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z(x^2 + y^2))$$

e se ne calcoli il flusso attraverso la frontiera dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}.$$

Si calcoli inoltre il momento d'inerzia di Ω rispetto all'asse z .

Soluzione. Il flusso è dato da

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega} \rangle d\sigma,$$

e possiamo usare il *Teorema della Divergenza* per calcolarlo, ovvero

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\partial\Omega} \rangle d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz.$$

Osserviamo che

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = x^2 + y^2,$$

quindi

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Usiamo le coordinate sferiche per calcolare questo integrale, ovvero

$$x = \varrho \cos \vartheta \sin \varphi, \quad y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \varrho \cos \varphi,$$

con $1 \leq \varrho \leq 2$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{F}} &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 \varrho^2 \sin^2 \varphi \varrho^2 \sin \varphi d\vartheta d\varphi d\varrho \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \right) \left(\int_1^2 \varrho^4 d\varrho \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi \right) \left(\int_1^2 \varrho^4 d\varrho \right) \\ &= 2\pi \left[-\cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\pi} \left[\frac{\varrho^5}{5} \right]_1^2. \end{aligned}$$

4

Per quanto riguarda il momento d'inerzia di Ω , ci basta osservare che

$$\text{dist}((x, y, z), \{x = y = 0\}) = x^2 + y^2,$$

quindi esso è dato da

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

che abbiamo già calcolato prima.

□