Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA B
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Calcolare la lunghezza L dell'arco di curva, dato in forma parametrica da $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, con $t \in [\pi/4, \pi/2]$*

$$L = \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

Esercizio 2. *Si trovi il minimo della funzione $f(x,y) = \arctan(x/y)$ sull'arco di curva dell'esercizio precedente*

$$\min_{\gamma} f = 0$$

Esercizio 3. *Si trovi il potenziale U del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x\,e^x, e^y)$ conservativo su $\mathbb{R}^2$*

$$U(x,y) = e^x\,(x-1) + e^y$$

Esercizio 4. *Si calcoli la derivata di $f(x,y) = \arcsin(x+y+1)$ nel punto $(0,-1)$ nella direzione $\omega = (\sqrt{3}/2, -1/2)$*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0,-1) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Esercizio 5. *Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ rappresentano una curva regolare (nessuno)*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, e^{x+y^2} + y^2 = 0\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 - x^4 = 0\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0\}$$

Esercizio 6. *Si calcoli l'integrale triplo*

$$\iiint_S \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\,dx\,dy\,dz = \frac{2\,\pi}{3}\,\log 2$$

dove $S = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2 \le 1,\ 1 \le z \le 2\}$

Esercizio 7. *Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^3 - y^3$ sull'insieme $E = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$*

$$\max_E f = 1 \qquad\qquad \min_E f = -1$$

Esercizio 8. *Si trovi l'insieme C dei punti critici della funzione $f(x,y) = \arctan(x^2+y^2)\,e^z$*

$$C = \{(0,0,z) \,:\, z \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \arccos(x+y+2)$ nel punto $(-1,-1,\pi/2)$.*

$$z = \frac{\pi}{2} - 2 - x - y$$

Esercizio 10. *Dire per quale $a \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo su $\mathbb{R}^2$*

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y\,(a\,y+x^2+1)+a\,(x^2+1)}{(x^2+y^2+1)\,(x^2+1)}\right) \qquad a = 0$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti). *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme*

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le e,\, x \ge 0 \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}\,x\Big\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_E \frac{y}{x}\, \log(x^2+y^2)\, dx\, dy.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che l'insieme di integrazione E si può descrivere in coordinate polari come

$$E = \Big\{(\varrho,\vartheta) \,:\, 0 \le \varrho \le \sqrt{e},\, \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{3}\Big\},$$

si veda la figura sotto. Usando le coordinate polari

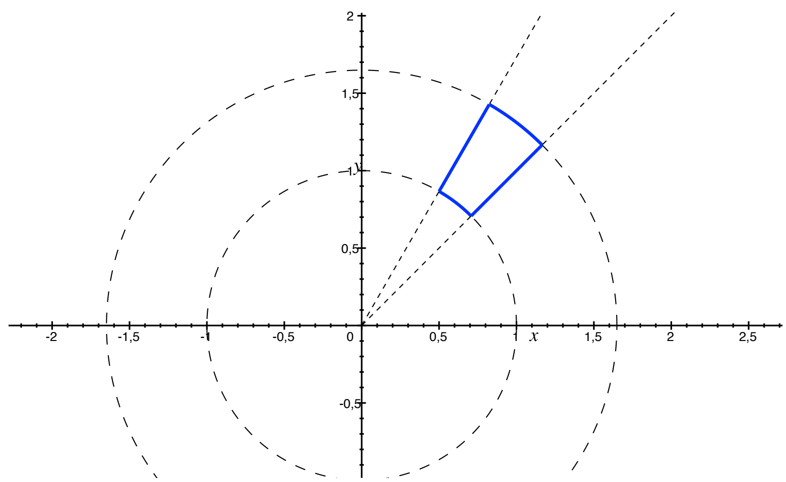

Figure 1. L'insieme E dell'Esercizio 11 è racchiuso dalla curva in blu.

$$x = \varrho\, \cos\vartheta, \qquad y = \varrho\, \sin\vartheta,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_E \frac{y}{x}\, \log(x^2+y^2)\, dx\, dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\, \log \varrho^2\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \\ &= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\, d\vartheta\right)\left(\int_1^{\sqrt{e}} \log \varrho^2\, \varrho\, d\varrho\right)\end{aligned}$$

Calcoliamo separatemente i due integrali: si ha

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\, d\vartheta = -\Big[\log\cos\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \log\frac{1}{2} - \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\log 2 + \frac{1}{2}\,\log 2 = \frac{3}{2}\,\log 2,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le proprietà dei logaritmi. Per calcolare il secondo integrale, basterà integrare per parti: si ha

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{e}} \varrho\, \log\varrho^2\, d\varrho = \int_1^{\sqrt{e}} 2\,\varrho\, \log\varrho\, d\varrho &= \Big[\varrho^2\, \log\varrho\Big]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \varrho^2\, \frac{1}{\varrho}\, d\varrho \\ &= e\, \log\sqrt{e} - \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli il flusso uscente dalla superficie chiusa*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z^2 = 1\},$$

del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \Big(2\,x + 10\,y, 4\,y + 10\,x, -6\,z + z^2 \arctan\sqrt{x^2 + y^2}\Big).$$

Soluzione. Indichiamo con Ω la porzione di $\mathbb{R}^3$ racchius dalla superficie S, ovvero

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |z| \leq 1,\, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

ovvero Ω è un cilindro con asse coincidente con l'asse delle z e con sezione data da un cerchio di raggio 1. Usando il Teorema della divergenza, si ottiene

$$\Phi_{\mathbf{F}} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \nu_S \, d\sigma = \iiint_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F} \, dx \, dy \, dz.$$

Si osservi adesso che

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(x, y, z) = 2\,z \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Usando le coordinate cilindriche, si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{F}} = \iiint_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F} \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^{1} \int_0^{2\,\pi} \int_0^1 2\,z \arctan\varrho \, \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dz \\ &= 2\,\pi \left(\int_{-1}^{1} 2\,z \, dz \right) \left(\int_0^1 \arctan\varrho \, \varrho \, d\varrho \right) = 0, \end{aligned}$$

concludendo quindi l'esercizio. $\square$