

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA 2
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si calcoli la lunghezza L della curva data in forma parametrica $\gamma(\vartheta) = (\vartheta^2 \cos \vartheta, \vartheta^2 \sin \vartheta)$ per $\vartheta \in [0, \sqrt{5}]$.

$$L = \frac{19}{3}$$

Esercizio 2. Dire quali fra i seguenti campi vettoriali sono conservativi su \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} & (x^2, x^2 - y), & \left(\frac{y}{x^2 y^2 + 1}, \frac{x}{x^2 y^2 + 1} \right), \\ & (\sin x + e^{xy}, \cos y), & \left(\arctan(x^2 + y^2 + 1), -\arctan \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Esercizio 3. Dire per quale $a \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo su \mathbb{R}^2 .

$$\left(e^x (\sin(x + y) + a \cos(x + y)), e^x \cos(x + y) \right) \quad a = 1$$

Esercizio 4. Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ sull'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\max_E f = 1 \quad \min_E f = -1$$

Esercizio 5. Si trovi l'insieme C dei punti critici della funzione $f(x, y, z) = (x^3 - y^3) \arctan z$.

$$C = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 6. Si calcoli l'integrale

$$\iiint_S \log(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = 2\pi \left(4 \log 2 - \frac{3}{2} \right)$$

dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 4, 0 \leq z \leq 1\}$.

Esercizio 7. Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 rappresentano una curva regolare

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x^2+y^2} = 1 \right\}, \quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)(x^2 - y) = 1 \right\}, \quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(x^4 + y^4) = 10 \right\}.$$

Esercizio 8. Trovare il dominio di definizione D della funzione $f(x, y) = \arcsin(xy + 1)$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq xy \leq 0\}$$

Esercizio 9. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ nel punto $(1, 1, 3)$.

$$z = 2x + 2y - 1$$

Esercizio 10. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = \arctan(xy)$ nel punto $(1, 1)$ nella direzione $\omega = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1, 1) = 0$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ e } \frac{y}{3} \leq |x| \leq \sqrt{4-y} \right\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_E |x| e^y dx dy.$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che l'insieme di integrazione E è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e che la funzione integranda è pari in x . Quindi si ha

$$\begin{aligned} \iint_E |x| e^y dx dy &= 2 \iint_{\{(x,y) \in E : x \geq 0\}} x e^y dx dy = 2 \int_0^3 \left(\int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} x dx \right) e^y dy \\ &= 2 \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y/3}^{\sqrt{4-y}} e^y dy \\ &= 2 \int_0^3 \left[\frac{4-y}{2} - \frac{y^2}{18} \right] e^y dy \\ &= 4 \int_0^3 e^y dy - \int_0^3 y e^y dy - \frac{1}{9} \int_0^3 y^2 e^y dy. \end{aligned}$$

Al fine di concludere, basta osservare che

$$\int_0^3 e^y dy = [e^y]_0^3 = e^3 - 1,$$

ed integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_0^3 y e^y dy &= [y e^y]_0^3 - \int_0^3 e^y dy \\ &= 3 e^3 - e^3 + 1 = 2 e^3 + 1, \end{aligned}$$

ed anche

$$\int_0^3 y^2 e^y dy = [y^2 e^y]_0^3 - 2 \int_0^3 y e^y dy = 9 e^3 - 4 e^3 - 2 = 5 e^3 - 2.$$

In conclusione, si ottiene

$$\iint_E |x| e^y dx dy = 4 e^3 - 4 - 2 e^3 - 2 - \frac{5}{9} e^3 + \frac{2}{9} = \frac{13}{9} e^3 - \frac{52}{9}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti). Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(yz + \frac{x^2}{2}, xz, xy \right)$$

attraverso il bordo ∂E dell'insieme

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0 \}.$$

Soluzione. Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_{\partial E} F \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

dove \mathbf{n} è il versore normale uscente, rispetto all'insieme E . Usiamo il Teorema della divergenza (anche detto Teorema di Gauss) per ricondurre questo integrale superficiale ad uno di volume: si ottiene dunque

$$\int_{\partial E} F \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_E \operatorname{div} F dx dy dz.$$

Si osservi adesso che

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = x,$$

quindi siamo ricondotti a calcolare l'integrale triplo

$$\int_E x dx dy dz.$$

Al fine di calcolare quest'ultimo integrale, osserviamo che l'insieme E è una mezza palla di centro l'origine $(0, 0, 0)$ e raggio 1: possiamo quindi usare le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ z = \varrho \sin \varphi, \end{cases} \quad \varrho \in [0, 1], \quad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Osservando che con questa scelta si ha

$$dx dy dz = \varrho^2 \cos \varphi d\varrho d\vartheta d\varphi,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} F \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_E \operatorname{div} F dx dy dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \varrho^3 \cos \vartheta \cos^2 \varphi d\varrho d\vartheta d\varphi \\ &= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta d\vartheta \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 \varrho^3 d\varrho \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio.

□