

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA B
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2019/2020

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si trovi un potenziale U per il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, -1)$

$$U(x, y, z) = xy - z$$

Esercizio 2. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \arctan(x^2 + y)$ nel punto $(0, 1, \pi/4)$.

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(y - 1)$$

Esercizio 3. Data la direzione $\omega = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e la funzione $f(x, y) = \arcsin(xy)$, si calcoli la derivata di f rispetto alla direzione ω nel punto $(0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 4. Si calcoli la divergenza del gradiente della funzione $U(x, y) = \arctan(x/y)$

$$\operatorname{div} \nabla U(x, y) = 0$$

Esercizio 5. Si calcoli la lunghezza ℓ dell'arco di cicloide $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$

$$\ell = 4$$

Esercizio 6. Si dia una superficie ϕ il cui sostegno coincida con l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

$$\phi(t, s) = (1 + 2 \sin \varphi \cos \vartheta, 2 \sin \varphi \sin \vartheta, 2 \cos \varphi) \quad (\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

Esercizio 7. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (-e^x \cos y, e^x \sin y)$ lungo un qualsiasi cammino regolare che va da $(0, 0)$ a $(1, 1)$

$$L = -e \cos(1) + 1$$

Esercizio 8. Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite è corretto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha} = 0 \quad \alpha < \frac{1}{2}$$

Esercizio 9. Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 centrato in $(0, 0)$ con resto di Peano per la funzione $f(x, y) = \sin(x - y)$

$$f(x, y) = x - y + o(x^2 + y^2)$$

Esercizio 10. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^z \cos y, e^x z + 2y, z)$ attraverso una sfera di raggio 1 e centro $(0, 0, 1)$

$$\Phi_{\mathbf{F}} = 4\pi$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Si calcoli il momento di inerzia dell'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 2\}$$

rispetto all'asse delle z .

Soluzione. Dobbiamo calcolare l'integrale di superficie

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma(x, y, z).$$

Osserviamo che Σ è il sostegno della superficie cartesiana

$$\Phi(t, s) = (t, s, f(t, s)), \quad \text{per } (t, s) \in B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\},$$

con

$$f(t, s) = \sqrt{t^2 + s^2}.$$

Ricordando la formula per gli integrali di superficie nel caso di superfici cartesiane, si ha allora

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma(x, y, z) &= \iint_B (t^2 + s^2) \sqrt{1 + |\nabla f(t, s)|^2} dt ds \\ &= \sqrt{2} \iint_B (t^2 + s^2) dt ds. \end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale, possiamo utilizzare le coordinate polari

$$t = \varrho \cos \vartheta, \quad s = \varrho \sin \vartheta, \quad (\varrho, \vartheta) \in [1, 2] \times [0, 2\pi].$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma(x, y, z) &= \iint_B (t^2 + s^2) \sqrt{1 + |\nabla f(t, s)|^2} dt ds \\ &= \sqrt{2} \iint_B (t^2 + s^2) dt ds = \sqrt{2} 2\pi \int_1^2 \varrho^3 d\varrho \\ &= 2\sqrt{2}\pi \frac{15}{4} = \frac{15\sqrt{2}}{2}\pi. \end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti). Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si trovino i punti critici di f in E , classificandoli. Si determinino inoltre

$$\min_E f \quad \text{e} \quad \max_E f.$$

Proof. Troviamo innanzitutto i punti critici. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy),$$

da cui si vede facilmente che $(0, 0)$ è l'unico punto critico. Si tratta di un punto critico degenere, dal momento che la matrice hessiana

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix},$$

è tale che

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte, se si considera la restrizione di f alla retta $y = 0$, si ha

$$g(x) = f(x, 0) = x^3,$$

che è una funzione strettamente monotona. Questo dimostra che $(0, 0)$ non può essere né punto di massimo né punto di minimo. Si tratta quindi di un punto sella.

Osserviamo adesso che E è un insieme chiuso e limitato ed f è continua su E , dal *Teorema di Weierstrass* abbiamo allora che

$$\min_E f \quad \text{e} \quad \max_E f,$$

esistono. Inoltre, dalla discussione iniziale e dal *Teorema di Fermat*, i corrispondenti punti di massimo e di minimo non possono trovarsi all'interno di E , ovvero in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Dovranno quindi stare su

$$\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Si ha quindi

$$\min_E f = \min_{\partial E} f \quad \text{e} \quad \max_E f = \max_{\partial E} f.$$

Al fine di determinarli, usiamo il *Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange*. I punti che stiamo cercando, sono quindi tra le soluzioni (x, y) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla G(x, y) \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

dove $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 2\lambda x \\ -6xy = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 2\lambda x \\ (\lambda + 3x)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 2\lambda x \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 2\lambda x \\ \lambda = -3x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizziamo separatamente adesso gli ultimi due sistemi. Per il primo, dal momento che $y = 0$, si vede facilmente che otteniamo i punti

$$P_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad P_2 = (-1, 0),$$

come soluzioni. Per il secondo sistema, sostituendo $\lambda = -3x$ nella prima equazione, troviamo

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = -6x^2 \\ \lambda = -3x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 9x^2 - 3y^2 = 0 \\ \lambda = -3x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = y^2/3 \\ \lambda = -3x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = y^2/3 \\ \lambda = -3x \\ y^2 = 3/4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = y^2/3 \\ \lambda = -3x \\ y = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Troviamo quindi le 4 soluzioni seguenti

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_5 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_6 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Andiamo adesso a valutare la funzione f su questi 6 punti: si ha

$$f(P_1) = f(P_4) = f(P_6) = 1 \quad \text{e} \quad f(P_2) = f(P_3) = f(P_5) = -1.$$

In conclusione

$$\min_E f = -1 \quad \text{e} \quad \max_E f = 1,$$

con P_2, P_3, P_5 punti di minimo e P_1, P_4, P_6 punti di massimo. □