

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA B
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Trovare il potenziale U del campo vettoriale conservativo $\mathbf{F}(x, y) = (y/(x^2 y^2 + 1), x/(x^2 y^2 + 1))$

$$U(x, y) = \arctan(xy)$$

Esercizio 2. Sia $f(x, y) = (x^2 + y^2)((x - 1)^2 + y^2)$. Si dica quali tra i seguenti sono punti di minimo assoluto per f

$$(1, 1), \quad (0, 0), \quad (1, 0)$$

Esercizio 3. Trovare l'insieme dei punti critici C della funzione $f(x, y, z) = \log(1 + x^2 + (y - 1)^2) \cos(z)$

$$C = \{(0, 1, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_E e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = 2\pi e^2$$

Esercizio 5. Si calcoli la lunghezza ℓ della curva $\gamma(t) = (t^2, 2t^2)$ con $t \in [0, 1]$

$$\ell = \sqrt{5}$$

Esercizio 6. Quali tra i seguenti insiemi di livello rappresentano una curva regolare?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 (y + 1) = 0\} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x+y} = 1\} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cos y = 0\}$$

Esercizio 7. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 1, 1)$ un campo vettoriale costante. Si calcoli il flusso di \mathbf{F} uscente dalla regione di spazio racchiusa da un ellissoide avente semiassi di lunghezza 1, 2 e 3

$$\Phi_{\mathbf{F}} = 0$$

Esercizio 8. Siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e $f(x, y) = xy$, si determini

$$\max_E f = 2 \quad \min_E f = -2$$

Esercizio 9. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \arctan(x^2 y + 1)$ nel punto $(-1, 0, \pi/4)$.

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}$$

Esercizio 10. Data la direzione $\omega = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$ e la funzione $f(x, y, z) = z e^{x+y}$, si calcoli

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1, -1, 1) = \sqrt{3}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq x/\sqrt{3} \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}$. Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{|y|}{x} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$$

Soluzione. L'insieme di integrazione si descrive in coordinate polari

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

come

$$D = \left\{ (\varrho, \vartheta) : 0 \leq \varrho < 2, -\frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6} \right\}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{|y|}{x} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 \frac{|\sin \vartheta|}{\cos \vartheta} \sqrt{1+\varrho^2} \varrho d\varrho d\vartheta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \sqrt{1+\varrho^2} \varrho d\varrho d\vartheta \\ &= 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} d\vartheta \right) \left(\int_0^2 \varrho \sqrt{1+\varrho^2} d\varrho \right) \\ &= 2 \left[-\log \cos \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1}{3} (1+\varrho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} (5\sqrt{5} - 1) \log \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

□

Esercizio 12 (9 punti). Sia $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 , tale che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z) = 1, \quad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si calcoli l'integrale di superficie

$$\iint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_C} d\sigma,$$

dove $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$ e \mathbf{n}_C rappresenta il versore normale uscente al bordo ∂C di C .

Soluzione. Usando il Teorema della Divergenza per il campo vettoriale $\mathbf{F} = \nabla u$, si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_C} d\sigma &= \iint_{\partial C} \nabla u \cdot \mathbf{n}_C d\sigma \\ &= \iiint_C \operatorname{div}(\nabla u) dx dy dz \\ &= \iiint_C \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Per ipotesi, la funzione integranda nell'ultimo integrale è identicamente uguale a 1, quindi si ottiene

$$\iint_{\partial C} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_C} d\sigma = \iiint_C dx dy dz = \operatorname{Vol}(C).$$

Per determinare il volume dell'insieme C , osserviamo che si tratta di un cono di altezza 1 e base di raggio 1: possiamo usare le formule geometriche elementari oppure gli strumenti dell'analisi. Procediamo in questo secondo modo: possiamo prendere il volume del cilindro di raggio 1 e altezza 1 (che vale π), in seguito sottrarci il volume del sottografico della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Si ha quindi

$$\operatorname{Vol} C = \pi - \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \pi - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho^2 d\varrho d\vartheta = \frac{\pi}{3}.$$

□