

FAC-SIMILE DI COMPITO DI ANALISI 2

PRIMA PARTE

Lo studente scriva solo la risposta direttamente su questo foglio.

La seconda parte verrà corretta esclusivamente nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.

Esercizio 1. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, con $t \in [0, \pi/2]$.

Esercizio 2. Dire quali fra i seguenti campi vettoriali sono conservativi su \mathbb{R}^2

$$\left(e^x \arctan y, \frac{e^x}{1+y^2} \right), \quad (\cos y, -\sin x), \quad (2, y), \quad (y e^x, e^x - \cos y)$$

Esercizio 3. Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo su \mathbb{R}^2

$$\left(\frac{x(\alpha + 1 + (y + x^2)^2)}{1 + y^2 + 2x^2y + x^4}, \frac{1}{1 + y^2 + 2x^2y + x^4} \right)$$

Esercizio 4. Calcolare il rotore e la divergenza del campo vettoriale $V(x, y, z) = (x^2, y, z^2 + \cos x)$

$$\operatorname{div} V(x, y, z) = \quad \operatorname{rot} V(x, y, z) =$$

Esercizio 5. Si trovi l'insieme dei punti critici C della funzione $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

$$C =$$

Esercizio 6. Trovare il dominio di definizione D della funzione $f(x, y) = \log(x^2 - y^2) + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$D =$$

Esercizio 7. Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 rappresentano una curva regolare

$$\{(x, y) : x + y = x^2 + y^2\} \quad \{(x, y) : xy = x^4 + y^4\} \quad \{(x, y) : \sin(x^2 - y^2) + \cos(x^2 - y^2) = 1\}$$

Esercizio 8. Sia $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$, calcolare

$$\iint_D xy \, dx \, dy =$$

Esercizio 9. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = e^x \cos y$ nel punto $(0, \pi/4, \sqrt{2}/2)$

$$z =$$

Esercizio 10. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$ nel punto $(1, 1)$ nella direzione $\omega = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1, 1) =$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte non verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (6 punti). *Siano $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\}$ e $f(x, y) = y \cos x$. Calcolare*

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Esercizio 12 (6 punti). *Calcolare il massimo e minimo della funzione $f(x, y, z) = x^4 + 2y^2 + 3z^2$ sulla calotta sferica $S_+ = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.*