Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso in cui lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si dica per quali valori di ϑ il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (e^x \cos\vartheta - e^y \sin\vartheta, e^x \sin\vartheta + e^y \cos\vartheta)$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$*

$$\vartheta = k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 2. *Sia $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4\,x\,y$. Si dica quali tra i seguenti sono punti sella per f*

$$(1,0), \qquad (0,1), \qquad (0,0), \qquad (1,-1)$$

Esercizio 3. *Trovare i punti di flesso della funzione $f(x) = e^{-x^2+2\,x-1}$*

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 4. *Si calcoli la lunghezza ℓ della curva $\gamma(t) = (\cos^2 t, \cos t\,\sin t)$, dove $t \in [-\pi/2, \pi/2]$*

$$\ell = \pi$$

Esercizio 5. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \arctan^2\frac{1}{x}\right)\left((2+x)^5 - x^5\right) = \frac{20}{3}$$

Esercizio 6. *Si scriva la curvatura κ_γ della curva cartesiana $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$*

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{2}{(1+4\,t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Esercizio 7. *Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x \cos y, -e^x \sin y, 1)$ lungo la curva regolare γ il cui sostegno è l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ z = y\}$*

$$\int_{\mathrm{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_\gamma\rangle\, d\ell = 0$$

Esercizio 8. *Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente è convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{n!}} \sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha+1}\right) \qquad \alpha \neq 0$$

Esercizio 9. *Si dica quali tra le serie seguenti sono convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,\log_5 n}$$

Esercizio 10. *Trovare una primitiva F della funzione $x \mapsto \arcsin x$*

$$F(x) = x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Si consideri la superficie seguente*

$$\phi(t,s) = (\cos s\,\cos t - 2\,\sin s\,\sin t, \sin s\,\cos t + 2\,\cos s\,\sin t, t), \qquad s \in [0,2], t \in [0,2\,\pi].$$

- *Si verifichi che ϕ è regolare;*
- *si calcoli il versore normale $\mathbf{N}_\phi(t,s)$, per ogni $s \in [0,2]$ e $t \in [0,2\,\pi]$;*
- *si verifichi che l'area del sostegno di ϕ coincide con il seguente integrale di una variabile*

$$2\int_0^{2\,\pi} \sqrt{1 + 3\,\sin^2 t\,(1 + 3\,\cos^2 t)}\,dt$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che ϕ è definita sulla chiusura di un aperto non vuoto e che ciascuna delle sue componenti è una funzione di classe C^1 delle due variabili (t,s). Per verificare che ϕ è regolare, dobbiamo verificare che

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \neq (0,0,0), \qquad \text{per ogni } s \in [0,2] \text{ e } t \in [0,2\,\pi].$$

Cominciamo col calcolare i due vettori "tangenti":

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) = (-\cos s\,\sin t - 2\,\sin s\,\cos t, -\sin s\,\sin t + 2\,\cos s\,\cos t, 1),$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) = (-\sin s\,\cos t - 2\,\cos s\,\sin t, \cos s\,\cos t - 2\,\sin s\,\sin t, 0).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) &= \begin{vmatrix} -\cos s\,\sin t - 2\,\sin s\,\cos t & -\sin s\,\sin t + 2\,\cos s\,\cos t & 1 \\ -\sin s\,\cos t - 2\,\cos s\,\sin t & \cos s\,\cos t - 2\,\sin s\,\sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\cos s\,\cos t + 2\,\sin s\,\sin t, -\sin s\,\cos t - 2\,\cos s\,\sin t, 3\,\sin t\,\cos t).\end{aligned}$$

Calcoliamo il modulo di questo vettore, per vedere quando se e quando si annulla:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s)\right|^2 &= (-\cos s\,\cos t + 2\,\sin s\,\sin t)^2 + (-\sin s\,\cos t - 2\,\cos s\,\sin t)^2 + 9\,\sin^2 t\,\cos^2 t \\ &= \cos^2 t + 4\,\sin^2 t + 9\,\sin^2 t\,\cos^2 t \\ &= 1 + 3\,\sin^2 t + 9\,\sin^2 t\,\cos^2 t = 1 + 3\,\sin^2 t(1 + 3\,\cos^2 t).\end{aligned}$$

Osserviamo adesso che l'ultima quantità non si annulla mai, in effetti è sempre maggiore o uguale a 1. Questo implica che

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s) \neq (0,0,0), \qquad \text{per ogni } s \in [0,2] \text{ e } t \in [0,2\,\pi],$$

e quindi la superficie è regolare.

Per quanto riguarda il versore normale, basta ricordare che esso è dato da

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_\phi(t,s) &= \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s}(t,s)}{\left|\dfrac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \dfrac{\partial \phi}{\partial s}(t,s)\right|} \\ &= \frac{(-\cos s\,\cos t + 2\,\sin s\,\sin t, -\sin s\,\cos t - 2\,\cos s\,\sin t, 3\,\sin t\,\cos t)}{\sqrt{1 + 3\,\sin^2 t(1 + 3\,\cos^2 t)}}.\end{aligned}$$

Infine, calcoliamo l'area del sostegno di ϕ: si ha

$$\iint_{\mathrm{Im}(\phi)} d\sigma(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\,\pi} \left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s)\right|\,ds\,dt,$$

che dimostra la formula voluta. □

Esercizio 12 (9 punti)**.** *Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, z^3\right).$$

Consideriamo i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ |z| \le \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

e

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 1,\, |z| \le \frac{1}{2} \right\}.$$

Si calcoli:

- *i flussi di* $\mathbf{F}$ *e di* $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ *attraverso* ∂V*;*
- *il flusso di* $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ *attraverso* S*.*

Soluzione. Occupiamoci intanto del primo punto. Osserviamo che per il flusso attraverso la superficie senza bordo ∂V, possiamo eventualmente usare il Teorema della Divergenza. Notiamo che

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F}(x,y,z) = 3\,z^2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$$

quindi si ha

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iiint_V 3\,z^2\,dx\,dy\,dz$$

e

$$\iint_{\partial V} \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) = 0.$$

Per terminare il primo punto, dobbiamo quindi calcolare l'integrale di volume su V della funzione $3\,z^2$. Si osservi che V è la palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 1, a cui abbiamo rimosso due calotte, tagliando ad altezza $z = 1/2$ e $z = -1/2$ rispettivamente. Se introduciamo le coordinate cilindriche usuali

$$\begin{array}{rcl} x & = & \varrho\cos\vartheta \\ y & = & \varrho\sin\vartheta \\ z & = & z, \end{array}$$

allora per descrivere V dobbiamo prendere

$$z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \qquad \vartheta \in [0, 2\,\pi], \qquad 0 \le \varrho \le \sqrt{1-z^2}.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x,y,z) &= \iiint_V 3\,z^2\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\,\pi} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \varrho\,d\varrho\,d\vartheta\,dz \\ &= 2\,\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-z^2)\,dz = \pi\,\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{12}\,\pi. \end{aligned}$$

Occupiamoci adesso del secondo punto, utilizzando il Teorema di Stokes abbiamo

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{N}_S \rangle \, d\sigma(x,y,z) = \int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \, d\ell,$$

dove abbiamo preso $\mathbf{N}_S$ **uscente**. In accordo con ciò, una parametrizzazione orientata positivamente di ∂S è data dalle due circonferenze

$$\gamma_1(\vartheta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \vartheta \in [0, 2\,\pi],$$

e

$$\gamma_2(\vartheta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \vartheta \in [0, 2\,\pi].$$

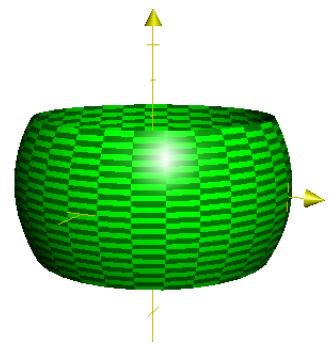

FIGURE 1. La superficie S dell'esercizio 12: coincide con una sfera privata di due calotte.

Si osservi che γ_1 è percorsa in senso anti-orario, mentre γ_2 è percorsa in senso orario. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+ S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \, d\ell &= \int_{\mathrm{Im}(\gamma_1)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_{\gamma_1} \rangle \, d\ell + \int_{\mathrm{Im}(\gamma_2)} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_{\gamma_2} \rangle \, d\ell \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\vartheta \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\vartheta \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\vartheta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle d\vartheta \\
&+ \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\vartheta \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\vartheta \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\vartheta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle d\vartheta \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\vartheta - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\vartheta = 0,
\end{aligned}$$

che conclude l'esercizio. $\square$