

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA A & B

– PROVA SCRITTA –

12 LUGLIO 2022

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2021/2022

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su un foglio bianco.

Al termine della prova, dovrà inviarne una foto

all'indirizzo `lorenzo.brasco@unife.it`

- Ogni esercizio vale 3 punti, in caso di risposta corretta

Esercizio 1. Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos \left((\sqrt[n]{n!})^\alpha \right) \right] \quad \alpha < -\frac{1}{2}$$

Esercizio 2. Si dica quali tra i seguenti punti sono punti di minimo locale per la funzione $f(x, y) = x^2 y + 1 + x y + y^2$

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad \boxed{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)} \quad \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad (0, 1) \quad (1, 3)$$

Esercizio 3. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + x^3) - x - x^3}{\log(1 + x) + \frac{x^2}{2} - \sin x} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 4. Si dica quali tra le seguenti affermazioni risultano corrette per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = o(x) \quad x = o(x^2) \quad \boxed{x^3 = o(x^2)} \quad \boxed{x^3 + x \sim x} \quad \boxed{\sqrt[10]{x} = o(\log x)}$$

Esercizio 5. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 2x)$ lungo il circuito $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$L = 18\pi$$

Esercizio 6. Data la funzione $f(x, y) = \arctan(xy)$, si scriva l'equazione del piano tangente al suo grafico nel punto $(1, 2, f(1, 2))$

$$z = \arctan(2) + \frac{2}{5}(x - 1) + \frac{1}{5}(y - 2)$$

Esercizio 7. Si calcoli la derivata di $f(x, y) = \arccos(x - y)$ nel punto $(1, 1)$ lungo la direzione $\omega = (\sqrt{3}/2, 1/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0) = \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}$$

Esercizio 8. Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 centrato in $x = 0$ con resto di Peano della funzione

$$\frac{1}{1 + x - x^2} = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 + o(x^4)$$

Esercizio 9. Si calcoli il momento d'inerzia dell'insieme $\Sigma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ rispetto all'asse x

$$M = \pi$$

Esercizio 10. Si calcoli l'area del grafico della funzione $f(x, y) = xy$ definita sull'insieme $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{3} \left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right)$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

*In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (9 punti). *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme*

$$E = \left\{ (x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, |y| \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_E \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy.$$

Esercizio 12 (7 punti). *Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x^2 y, x)$. Se ne calcoli il flusso attraverso la frontiera dell'insieme*

$$V = \left\{ (x, y, z) : |z| \leq 1 - x^2 - y^2 \right\}.$$

Si dica inoltre se il campo \mathbf{F} è conservativo, giustificando la risposta. In caso affermativo, se ne trovi un potenziale.