Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA A&B
– PROVA SCRITTA –
15 GENNAIO 2024

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA
MECCANICA – A.A. 2023/2024

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

Prima parte

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso in cui lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta <u>*completa e corretta*</u>

Esercizio 1. *Si dica quali tra le seguenti serie numeriche convergono*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\,\sin\left(\frac{1}{n^n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2+n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{n!} \qquad \textit{prima, terza}$$

Esercizio 2. *Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali sono conservativi sul proprio insieme di definizione*

$$\mathbf{F}(x,y) = (2\,y, x) \qquad \mathbf{G}(x,y) = (-y, x) \qquad \mathbf{H}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \boxed{\mathbf{I}(x,y,z) = (y,x,z)}$$

Esercizio 3. *Si calcoli l'area del grafico della funzione* $f(x,y) = x$ *definita su* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

$$\text{Area} = 3\sqrt{2}\,\pi$$

Esercizio 4. *Trovare e classificare i punti critici non degeneri della seguente funzione* $f(x,y) = x^2\,y - x\,y^2 - y$

$$(\pm 1, 0) \ \ \textit{punti sella}$$

Esercizio 5. *Siano* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 1\}$ *e* $f(x,y) = x^2 - 2\,y^2$, *si calcolino*

$$\max_E f = 1 \qquad e \qquad \min_E f = -2$$

Esercizio 6. *Si calcoli il lavoro* L *del campo vettoriale* $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,y)$ *lungo il circuito* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$ *con* $t \in [0, 2\,\pi]$

$$L = -\pi$$

Esercizio 7. *Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine* 3 *con resto di Peano centrato in* $x = 0$ *per la seguente funzione*

$$\log(1+x-x^3) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\,x^3 + o(x^3) \qquad \textit{per } x \to 0$$

Esercizio 8. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione* $f(x,y) = x\arctan y$ *nel punto* $(1, \sqrt{3}, f(1,\sqrt{3}))$.

$$z = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\,(x-1) + \frac{1}{4}\,(y-\sqrt{3})$$

Esercizio 9. *Si dica per quali valori del parametro* x *la seguente serie risulta essere convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\,x^2} \qquad \textit{per } x \neq 0$$

Esercizio 10. *Si calcoli il baricentro dell'insieme* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [-1,1],\, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$

$$\mathbf{b}_E = \left(0, \frac{4}{3\,\pi}\right)$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (9 punti)**.** *Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ il seguente grafico di funzione, dato da*

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 1, z = x^2+y^2\Big\}.$$

- *Si calcoli il momento d'inerzia di Σ, rispetto all'asse z;*
- *si calcoli il flusso del campo vettoriale costante $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ attraverso Σ.*

Soluzione. Si osservi innanzitutto che questo esercizio è lo stesso dell'appello di Settembre 2023. Copio e incollo qua sotto la soluzione, sperando che prima o poi gli studenti si decidano a studiare gli **integrali di superficie**.

L'insieme Σ è il **grafico di una funzione di** 2 **variabili**, quindi possiamo vederlo come il **sostegno di una superficie cartesiana**. Dobbiamo quindi calcolare due **integrali di superficie**, dati da

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)\, d\sigma(x,y,z) \qquad \text{e} \qquad \iint_\Sigma \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{N}\rangle\, d\sigma(x,y,z).$$

Per quanto visto a lezione (anche se nessuno studente si decide a studiare questa parte), si ha

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)\, d\sigma(x,y,z) = \iint_A (x^2+y^2)\,\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy,$$

dove

$$A = \Big\{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \le 1\Big\} \qquad \text{e} \qquad f(x,y) = x^2+y^2.$$

Abbiamo quindi

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)\, d\sigma(x,y,z) = \iint_A (x^2+y^2)\,\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy = \iint_A (x^2+y^2)\,\sqrt{1+4\,x^2+4\,y^2}\, dx\, dy.$$

L'ultimo integrale si può calcolare usando le coordinate polari

$$x = \varrho\,\cos\vartheta, \qquad y = \varrho\,\sin\vartheta,$$

quindi si ha

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)\, d\sigma(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \varrho^3\,(1+4\,\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varrho\, d\vartheta = 2\,\pi\int_0^1 \varrho^3\,(1+4\,\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varrho.$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale, si può usare un'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varrho^3\,(1+4\,\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varrho &= \left[\varrho^2\,\frac{1}{12}\,(1+4\,\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \varrho\,\frac{1}{6}\,(1+4\,\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\, d\varrho \\ &= \left[\varrho^2\,\frac{1}{12}\,(1+4\,\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{120}\,(1+4\,\varrho^2)^{\frac{5}{2}}\, d\varrho\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}\,(5\,\sqrt{5}-1) - \frac{1}{120}\,(25\,\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$

Il calcolo del secondo integrale si svolge in modo analogo, ricordando che per una superficie cartesiana si ha

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right),$$

da cui quindi

$$\iint_\Sigma \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{N}\rangle\, d\sigma(x,y,z) = \iint_A \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,\sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy = \iint_A dx\, dy = \pi.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+3\,x^2-3\,y^2, y-6\,y\,x, z)$. Se ne calcoli il flusso attraverso l'insieme*

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2 \le 1,\, z = 1-x^2-y^2\Big\} \cup \Big\{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2 \le 1,\, z = 0\Big\}$$

Si dica inoltre se il campo $\mathbf{F}$ *è conservativo, giustificando la risposta. In caso affermativo, se ne trovi un potenziale.*

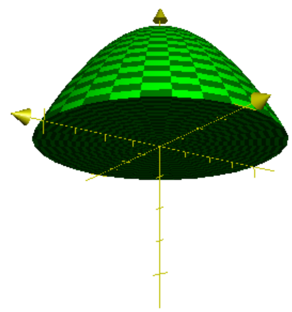

FIGURA 1. L'insieme E dell'Esercizio 12.

Soluzione. Si osservi che l'insieme Σ può essere visto come la frontiera dell'insieme chiuso e limitato

$$E = \Big\{(x, y, z) \, : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\Big\},$$

si veda la Figura 1. Tale frontiera, è unione di due sostegni di superfici regolari. Inoltre, il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è C^1 su tutto $\mathbb{R}^3$. Possiamo allora applicare il Teorema della Divergenza per ottenere che il flusso *uscente* da Σ è dato da

$$\Phi_{\mathbf{F}|\Sigma} = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma(x, y, z) = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz.$$

Osserviamo adesso che

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 3\,x^2 - 3\,y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y - 6\,y\,x) + \frac{\partial}{\partial z} z = 3,$$

da cui quindi

$$\Phi_{\mathbf{F}|\Sigma} = 3 \iiint_E dx \, dy \, dz.$$

Chiamiamo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}$, utilizzando la formula dell'integrale iterato e vedendo E come insieme $z-$semplice, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{F}|\Sigma} = 3 \iiint_E dx \, dy \, dz &= 3 \iint_A \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dx \, dy \\
&= 3 \iint_A (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\
&= 3 \int_0^{2\,\pi} \int_0^1 (1 - \varrho^2) \, \varrho \, d\vartheta \, d\varrho \\
&= 6\,\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{6\,\pi}{4} = \frac{3}{2}\,\pi.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda domanda, osserviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= -6\,y = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y},
\end{aligned}$$

quindi il campo è irrotazionale su $\mathbb{R}^3$. Dal momento che quest'ultimo insieme è stellato, si ottiene che $\mathbf{F}$ è conservativo.

Infine, troviamo un potenziale U per $\mathbf{F}$: per definizione, si deve avere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + 3\,x^2 - 3\,y^2, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = y - 6\,y\,x, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = z.$$

Dalla prima equazione, otteniamo che U deve avere la forma seguente

$$U(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+x^3-3\,y^2\,x+g(y,z),$$

con g funzione incognita dipendente soltanto da y e z. Usando questa espressione nella seconda condizione per U, si ha

$$y-6\,y\,x=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}+x^3-3\,y^2\,x+g(y,z)\right)=-6\,y\,x+\frac{\partial g}{\partial z}$$

ovvero

$$\frac{\partial g}{\partial z}=y.$$

Abbiamo dunque che g deve avere la forma seguente

$$g(y,z)=\frac{y^2}{2}+h(z),$$

con h funzione incognita dipendente soltanto da z. Inseriamo questa informazione nell'espressione di U ricavata in precedenza, così da avere

$$U(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+x^3-3\,y^2\,x+\frac{y^2}{2}+h(z).$$

Infine, inseriamo questa informazione nella terza equazione per U: si ottiene

$$z=\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2}+x^3-3\,y^2\,x+\frac{y^2}{2}+h(z)\right)=h'(z).$$

Possiamo dunque prendere $h(z)=z^2/2$ e concluderne che

$$U(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+x^3-3\,y^2\,x,$$

è un potenziale per $\mathbf{F}$. $\square$