

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA A+B
– PROVA SCRITTA DEL 16 GENNAIO 2023 –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2022/2023

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si calcoli l'area del grafico della funzione $f(x, y) = xy$ definita su $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

Esercizio 2. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x \arctan y$ nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

Esercizio 3. Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = x^2 \cos x$

$$F(x) = x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x$$

Esercizio 4. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+x^2} - \sin x - 1}{\log(1+x-x^2) - x} = -1$$

Esercizio 5. Sia $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, si calcolino

$$\min_{(x,y) \in E} (x + 3y) = -\sqrt{10} \qquad \max_{(x,y) \in E} (x + 3y) = \sqrt{10}$$

Esercizio 6. Si trovino i punti critici della funzione $f(x, y) = 2xy^2 - y^3 - x$, classificandoli

$$\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ punti sella}$$

Esercizio 7. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin(xy), x \sin(xy))$ lungo il sostegno della curva $\gamma(t) = (t, e^t)$, con $t \in [0, \pi]$

$$L = 1 - \cos(\pi e^\pi)$$

Esercizio 8. Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie risulta convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \left(\frac{n+14}{n^\alpha} \right) \quad \text{per } \alpha > 3$$

Esercizio 9. Si dia lo sviluppo di Taylor, centrato in $x_0 = 0$ all'ordine 3 con resto di Peano, della funzione seguente

$$\frac{1}{1 + \sin x} = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Esercizio 10. Si calcoli il momento d'inerzia del triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$ rispetto all'asse delle y

$$M = \frac{1}{3}$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$, si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy.$$

Esercizio 12 (7 punti). Sia \mathbf{B} il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

- (1) Si trovi il dominio di definizione D del campo \mathbf{B} ;
- (2) si dica se \mathbf{B} è conservativo su D . In caso affermativo, se ne calcoli un potenziale;
- (3) si dica se \mathbf{B} è solenoidale su D ;
- (4) si calcoli il flusso di \mathbf{B} attraverso gli insiemi Σ e ∂E , dove

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x = 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \quad e \quad E = \{(x, y, z) : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$