Nome, Cognome ....................................................

Matricola ..............................................................

# ANALISI MATEMATICA
# – PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

*- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.*

*- La seconda parte verrà corretta* **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

*- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.*

**Esercizio 1.** *Si calcoli la lunghezza della $\ell$ curva grafico di $f(x) = \frac{1}{3}(x^2-2)^{3/2}+1$ per $x \in [2,3]$.*

$$\ell = \frac{16}{3}$$

**Esercizio 2.** *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n = 0$$

**Esercizio 3.** *Dire per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo su $\mathbb{R}^2$.*

$$\left(\ln\left((x+2)^2+y^2+1\right), \frac{\alpha\, y}{\sqrt{y^2+1}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{y^2+1}}\right)\right) \qquad \alpha = 2$$

**Esercizio 4.** *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \frac{x^2+1}{y^2+1}$ nel punto $(1,1,1)$.*

$$z = x - y + 1$$

**Esercizio 5.** *Tra le serie seguenti, evidenziare quelle convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n\,(\log n)^5} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\cos n\,\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**Esercizio 6.** *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} e^{-t^2}\,dt\right) \qquad \alpha > 1$$

**Esercizio 7.** *Usando uno sviluppo di Taylor fino all'ordine opportuno, calcolare il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\log(1+x^2)}{\sin x - x + \frac{x^3}{6} + \log(1+x^5)} = \frac{120}{121}$$

**Esercizio 8.** *Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$ nel punto $(1,1)$ nella direzione $\omega = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

**Esercizio 9.** *Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ rappresentano una curva regolare*

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1} = 1\right\}, \quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon \arctan(x+y+1) = 1\}, \quad \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2+1}{y^2+1} = 1\right\}.$$

**Esercizio 10.** *Trovare una primitiva $F$ della funzione $x \mapsto \log(x-\sqrt{7})$*

$$F = (x-\sqrt{7})\log(x-\sqrt{7}) - x$$

## Seconda parte

*Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.*

*In questa parte* **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

**Esercizio 11** (7 punti). *Data la funzione*

$$h(x,y) = \frac{x\,y}{1+y^2},$$

*si calcoli l'integrale*

$$\iint_E h(x,y)\,dx\,dy,$$

*dove*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \leq 3,\ y \geq 0,\ x \geq 1\}.$$

*Soluzione.* L'insieme $E$ corrisponde ad un quarto della circoferenza di centro $(1,0)$ e raggio $\sqrt{3}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\iint_E \frac{x\,y}{1+y^2}\,dx\,dy &= \int_1^{1+\sqrt{3}} \left(\int_0^{\sqrt{3-(x-1)^2}} \frac{y}{1+y^2}\,dy\right) x\,dx \\
&= \int_1^{1+\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}\,\log(1+y^2)\right]_0^{\sqrt{3-(x-1)^2}} x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} x\,\log(1+3-(x-1)^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} x\,\log(3-x^2+2\,x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} x\,\log(3-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} x\,\log(1+x)\,dx \\
&= \left[\frac{x}{2}\,\log(3-x)\right]_1^{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{x^2}{3-x}\,dx \\
&\quad + \left[\frac{x}{2}\,\log(1+x)\right]_1^{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{2}\,\log(3-x)\right]_1^{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{(3-x)\,(-x-3)+9}{3-x}\,dx \\
&\quad + \left[\frac{x}{2}\,\log(1+x)\right]_1^{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{(x+1)\,(x-1)+1}{1+x}\,dx \\
&= \left[\frac{x}{2}\,\log(3-x)\right]_1^{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} (x+3)\,dx + \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{9}{3-x} \\
&\quad + \left[\frac{x}{2}\,\log(1+x)\right]_1^{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{1+x}\,dx.
\end{aligned}$$

Osservando che

$$\int (x+3)\,dx = \frac{(x+3)^2}{2} + c, \qquad \int \frac{9}{3-x} = 9\,\log|3-x| + c,$$
$$\int (x-1)\,dx = \frac{(x-1)^2}{2} + c, \qquad \int \frac{1}{1+x}\,dx = \log|1+x| + c,$$

si conclude l'esercizio con facili calcoli. □

**Esercizio 12** (7 punti). *Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, 1)$$

*e la superficie*

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, \ |z| \leq 1\}.$$

*Soluzione.* Verifico la formula di Stokes

(*) $$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{ds}.$$

Osservo che $\mathcal{S}$ è la superficie laterale del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ compresa tra i piani $z = -1$ e $z = 1$, orientata verso l'interno, e $\partial^+\mathcal{S}$ è formato dalla circonferenza $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1, \ z = -1\}$ percorsa in senso antiorario e dalla circonferenza $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1, \ z = 1\}$ percorsa in senso orario.

Abbiamo che l'integrale di superficie in (*) è nullo perché

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ c^3 & y^3 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0).$$

Per calcolare il termine a destra nella (*), osservo che

(**) $$\int_{\partial^+\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot ds = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot ds - \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot ds,$$

Parametrizziamo la curva $\gamma_1$ come segue

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta), \\ y(\theta) = \sin(\theta), \\ z(\theta) = -1, \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi];$$

il vettore tangente a $\gamma_1$ è

$$T(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \cdot T(\theta) \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (-\cos^3(\theta)\sin(\theta) + \sin^3(\theta)\cos(\theta) - 1 \cdot 0) \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\cos^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Parametrizziamo la curva $\gamma_2$ come segue

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta), \\ y(\theta) = \sin(\theta), \\ z(\theta) = 1, \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi];$$

il vettore tangente a $\gamma_1$ è

$$T(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \cdot T(\theta) \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (-\cos^3(\theta)\sin(\theta) + \sin^3(\theta)\cos(\theta) + 1 \cdot 0) \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\cos^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo i due valori trovati nella (**) si ha

$$\int_{\partial^+\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot ds = 0 - 0 = 0.$$

□