

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. Si determini per quali $\alpha > 0$ il limite seguente è corretto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha - \sin x}{(1 - \cos x)^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1$$

Esercizio 2. Si dica quali tra i seguenti sono punti sella per la funzione $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy$

$$(0, 0) \quad (1, -1) \quad \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \quad (-2, 2) \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

Esercizio 3. Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = \arctan x$

$$F(x) = x \arctan x - \log \sqrt{1 + x^2}$$

Esercizio 4. Si trovi la lunghezza della curva $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ con $t \in [0, \pi]$

$$\ell(\gamma) = 4$$

Esercizio 5. Si trovi il baricentro $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del sostegno della superficie $\phi(t, s) = (\cos t, \sin t, s)$ con $t \in [0, \pi/4]$, $s \in [0, 1]$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4}{\pi} \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 6. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$, si determinino

$$\min_{(x,y) \in E} (x - y) = -3/\sqrt{6} \quad \max_{(x,y) \in E} (x - y) = 3/\sqrt{6}$$

Esercizio 7. Si dica quali tra le seguenti serie risultano convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + 2^n}{4^n + 5^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{n^2 + 2}{n^3 + 1}\right)$$

Esercizio 8. Sia

$$U_{LJ}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$$

Si calcoli il lavoro del campo di Lennard-Jones $\mathbf{F}_{LJ}(x, y, z) = \nabla U_{LJ}(x, y, z)$ lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, \pi/2]$

$$\int_{\text{Im}(\gamma)} \langle \mathbf{F}_{LJ}, \mathbf{T}_\gamma \rangle dl = U_{LJ}(0, 1, \pi/2) - U_{LJ}(1, 0, 0) = (1 + \pi^2/4)^{-1} - (1 + \pi^2/4)^{-1/2}$$

Esercizio 9. Si dia lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ con resto di Peano della funzione

$$f(x) = \log(1 + x - x^3) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Esercizio 10. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = \arctan(x + y)$ nel punto $(1/2, 1/2, \pi/4)$

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1/2) + \frac{1}{2}(y - 1/2)$$

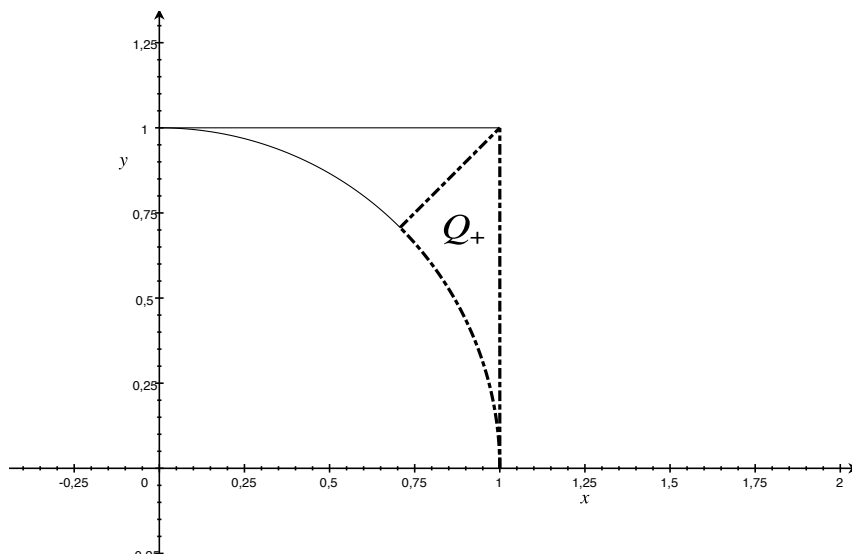


FIGURE 1. L'insieme di integrazione dell'Esercizio 11.

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (7 punti). Consideriamo l'insieme

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che l'insieme Q è simmetrico rispetto all'asse $y = x$. La funzione che dobbiamo integrare ha lo stesso tipo di simmetria, ovvero il suo grafico è simmetrico rispetto al piano $x = y$. Quindi, se indichiamo con

$$Q_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\},$$

si veda la Figura 1, si ha

$$\iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 2 \iint_{Q_+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Usiamo adesso le coordinate polari

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

dove $\vartheta \in [0, \pi/4]$ e $1 \leq \varrho \leq 1/\cos \vartheta$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_Q \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= 2 \iint_{Q_+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 2 \int_0^{\pi/4} \int_1^{\frac{1}{\cos \vartheta}} \frac{1}{\varrho} \varrho d\varrho d\vartheta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta - \frac{\pi}{2} = . \end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale, possiamo usare il cambio di variabile

$$\vartheta = 2 \arctan t, \quad \text{con } t \in \left[0, \tan \frac{\pi}{8}\right],$$

ed ottenere

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta &= \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{dt}{1-t^2} \\ &= \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] dt = \left[\log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\tan \frac{\pi}{8}} = \log \frac{1 + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan \frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (8 punti). Sia $\mathbf{F}_{LJ} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dell'Esercizio 8 (vedi sopra). Consideriamo il sottoinsieme V di \mathbb{R}^3 , definito da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Si calcoli il flusso di \mathbf{F}_{LJ} attraverso ∂V .

Soluzione. Il flusso di \mathbf{F}_{LJ} è definito come

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{LJ}, \mathbf{N} \rangle d\sigma.$$

Se come \mathbf{N} prendiamo la normale uscente, allora dal Teorema della Divergenza abbiamo

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{LJ}, \mathbf{N} \rangle d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}_{LJ} dx dy dz.$$

Calcoliamo adesso la divergenza del campo di Lennard-Jones: si ha innanzitutto

$$\mathbf{F}_{LJ}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)),$$

dove

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ F_2(x, y, z) &= -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ F_3(x, y, z) &= -\frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Quindi si ottiene

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_{LJ}(x, y, z) = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Usiamo adesso le coordinate sferiche

$$x = \varrho \cos \vartheta \sin \varphi, \quad y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \varrho \cos \vartheta,$$

con $\varrho \in [1, 2]$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi/4] \cup [3/4\pi, \pi]$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}_{LJ}, \mathbf{N} \rangle d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}_{LJ} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 \frac{2}{\varrho^4} \varrho^2 \sin \varphi d\varrho d\varphi d\vartheta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_{3/4\pi}^{\pi} \int_1^2 \frac{2}{\varrho^4} \varrho^2 \sin \varphi d\varrho d\varphi d\vartheta \\ &= 4\pi \left(\int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{\varrho^2} d\varrho \right) \\ &\quad + 4\pi \left(\int_{3/4\pi}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{\varrho^2} d\varrho \right) \\ &= 2\pi\sqrt{2}, \end{aligned}$$

concludendo così l'esercizio. □