Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2016/2017

`Libri, appunti e calcolatrici` **non ammessi**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si calcoli la lunghezza L della curva data in forma parametrica $\gamma(\vartheta) = (\vartheta^2 \cos\vartheta, \vartheta^2 \sin\vartheta)$ per $\vartheta \in [0, \sqrt{5}]$.*

$$L = \frac{19}{3}$$

Esercizio 2. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 3. *Dire per quale $a \in \mathbb{R}$ il seguente campo vettoriale è conservativo su $\mathbb{R}^2$.*

$$\Big(e^x\,(\sin(x+y) + a\,\cos(x+y)), e^x\,\cos(x+y)\Big) \qquad a = 1$$

Esercizio 4. *Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{\frac{1}{n}} - 1 - \log\left(\frac{n+1}{n^\alpha}\right)\right] \qquad \alpha = 1$$

Esercizio 5. *Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ sull'insieme $E = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$*

$$\max_E f = 1 \qquad \min_E f = -1$$

Esercizio 6. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2 - x) + \tan x - \sin^2 x}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{4}{3}$$

Esercizio 7. *Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ rappresentano una curva regolare*

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x^2+y^2} = 1\right\}, \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)\,(x^2-y) = 1\}, \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(x^4+y^4) = 10\}.$$

Esercizio 8. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(1+\log n)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Esercizio 9. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2+y^2+1$ nel punto $(1,1,3)$.*

$$z = 2\,x + 2\,y - 1$$

Esercizio 10. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = \arctan x$.*

$$F(x) = x\,\arctan x - \frac{1}{2}\,\log(1+x^2)$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Si consideri l'insieme*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0 \ e \ \frac{y}{3} \leq |x| \leq \sqrt{4-y}\right\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_E |x|\, e^y \, dx\, dy.$$

Soluzione. Si osservi innanzitutto che l'insieme di integrazione E è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e che la funzione integranda è pari in x. Quindi si ha

$$\begin{aligned}\iint_E |x|\, e^y \, dx\, dy = 2 \iint_{\{(x,y)\in E\,:\, x\geq 0\}} x\, e^y\, dx\, dy &= 2\int_0^3 \left(\int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} x\, dx\right) e^y\, dy \\ &= 2\int_0^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y/3}^{\sqrt{4-y}} e^y\, dy \\ &= 2\int_0^3 \left[\frac{4-y}{2} - \frac{y^2}{18}\right] e^y\, dy \\ &= 4\int_0^3 e^y\, dy - \int_0^3 y\, e^y\, dy - \frac{1}{9}\int_0^3 y^2\, e^y\, dy.\end{aligned}$$

Al fine di concludere, basta osservare che

$$\int_0^3 e^y\, dy = \Big[e^y\Big]_0^3 = e^3 - 1,$$

ed integrando per parti

$$\begin{aligned}\int_0^3 y\, e^y\, dy &= \Big[y\, e^y\Big]_0^3 - \int_0^3 e^y\, dy \\ &= 3\, e^3 - e^3 + 1 = 2\, e^3 + 1,\end{aligned}$$

ed anche

$$\int_0^3 y^2\, e^y\, dy = \Big[y^2\, e^y\Big]_0^3 - 2\int_0^3 y\, e^y\, dy = 9\, e^3 - 4\, e^3 - 2 = 5\, e^3 - 2.$$

In conclusione, si ottiene

$$\iint_E |x|\, e^y\, dx\, dy = 4\, e^3 - 4 - 2\, e^3 - 2 - \frac{5}{9}\, e^3 + \frac{2}{9} = \frac{13}{9}\, e^3 - \frac{52}{9}.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli il flusso del campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = \left(y\, z + \frac{x^2}{2},\, x\, z,\, x\, y\right)$$

attraverso il bordo ∂E dell'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}.$$

Soluzione. Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_{\partial E} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore normale uscente, rispetto all'insieme E. Usiamo il Teorema della divergenza (anche detto Teorema di Gauss) per ricondurre questo integrale superificiale ad uno di volume: si ottiene dunque

$$\int_{\partial E} F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_E \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz.$$

Si osservi adesso che

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = x,$$

quindi siamo ricondotti a calcolare l'integrale triplo

$$\int_E x\, dx\, dy\, dz.$$

Al fine di calcolare quest'ultimo integrale, osserviamo che l'insieme E è una mezza palla di centro l'origine $(0,0,0)$ e raggio 1: possiamo quindi usare le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta\,\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ z = \varrho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varrho\in[0,1], \quad \vartheta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Osservando che con questa scelta si ha

$$dx\,dy\,dz = \varrho^2\,\cos\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\partial E} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_E \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \varrho^3\,\cos\vartheta\,\cos^2\varphi\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi \\
&= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^1\varrho^3\,d\vartheta\right) \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$