Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2017/2018

`Libri, appunti e calcolatrici` **`non ammessi`**

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.

- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*

- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.

Esercizio 1. *Si trovi una primitiva F della funzione $f(x) = \arcsin x$.*

$$F(x) = x\,\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Esercizio 2. *Si calcoli il lavoro L del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x, y, z)$ lungo la curva $\gamma(\vartheta) = (\vartheta^2\,\cos\vartheta, \vartheta^2\,\sin\vartheta, \vartheta)$ per $\vartheta \in [0, 2\,\pi]$.*

$$L = 2\,\pi^2\,(4\,\pi^2 + 1)$$

Esercizio 3. *Si calcoli il seguente limite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n \frac{n+\log n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{e^2}$$

Esercizio 4. *Si trovi un potenziale U del campo vettoriale $\mathbf{F} = (e^x\,\sin(x-y) + e^x\,\cos(x-y), -e^x\,\cos(x-y))$*

$$U(x,y) = e^x\,\sin(x-y)$$

Esercizio 5. *Si dica per quali α la serie seguente risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\,\sin\left(\frac{n+1}{n^\alpha}\right) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Esercizio 6. *Si consideri l'insieme $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y\geq 0 \text{ e } x^2+y^2\leq 1\}$. Si calcoli l'integrale doppio*

$$\iint_E x^2\,dx\,dy = \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 7. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(2\,x)-\sin(2\,x)}{\log(1-x)-1+e^x} = 8$$

Esercizio 8. *Si dia una superficie ϕ il cui sostegno coincida con l'insieme $\Sigma = \{(x,y,z)\,:\, x^2+y^2+z^2=1, z\geq 1/2\}$*

$$\phi(t,s) = (\cos t\,\sin s, \sin t\,\sin s, \cos s) \qquad \text{con } t\in[0,2\,\pi] \text{ e } s\in[0, \pi/3]$$

Esercizio 9. *Dire quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2\,n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2 - y^3 + 1$ nel punto $(1,1,1)$.*

$$z = 2\,x - 3\,y + 2$$

Seconda parte

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (7 punti)**.** *Si trovino massimo e minimo della funzione* $f(x,y) = x^3 - 3\,x\,y^2$ *sull'insieme*

$$E = \{(x,y)\,:\,x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si trovino anche eventuali altri punti critici di f *contenuti in* E*, classificandoli (punti di minimo locale, punto di massimo locale, punti sella).*

Soluzione. Si osservi che E è il disco chiuso di raggio 1 e centro $(0,0)$. Si tratta di un insieme chiuso e limitato, quindi f ammette massimo e minimo, in quanto funzione continua (si usa qui il Teorema di Weierstrass). Una volta appurata l'esistenza del massimo e del minimo, determiniamoli.

Cominciamo osservando che f ha un unico punto critico, dato da $(0,0)$. Dal momento che

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6\,x & 0 \\ 0 & -6x \end{bmatrix},$$

si ha

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi siamo in un caso dubbio. Osserviamo però che valutando f lungo la curva passante da $(0,0)$ data da $y = 0$ si ha

$$f(x,0) = x^3,$$

che è una funzione strettamente crescente. Quindi $(0,0)$ non può essere ne' punto di minimo, ne' punto di massimo.

Analizziamo adesso la situazione al bordo, usando il metodi dei moltiplicatori di Lagrange: introducendo la funzione

$$H(x,y;\lambda) = x^3 - 3\,x\,y^2 - \lambda\,(x^2 + y^2),$$

cerchiamo le soluzioni (x,y,λ) del sistema

$$\begin{cases} \nabla H(x,y;\lambda) & = & \mathbf{0} \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} 3\,x^2 - 3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,x \\ -6\,x\,y & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{cases}$$

Caso $\lambda = 0$: in tal caso, dalla prima equazione in (1) otteniamo subito $|x| = |y|$. D'altronde, dalla seconda equazione in (1), abbiamo anche $x\,y = 0$, ovvero almeno uno tra x e y deve annullarsi. Mettendo insieme queste due informazioni, si ha allora $x = y = 0$, che però contraddice la terza equazione in (1). Quindi, se $\lambda = 0$, non ci sono soluzioni.

Caso $\lambda \neq 0$: riscriviamo il sistema come

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} 3\,x^2 - 3\,y^2 & = & 2\,\lambda\,x \\ (6\,x + 2\,\lambda)\,y & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$(6\,x + 2\,\lambda)\,y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 0 \ \text{ oppure } \ 6\,x + 2\,\lambda = 0.$$

Assumiamo quindi $y = 0$, dalla terza equazione in (2) troviamo $x = \pm 1$. Usando queste informazioni nella prima equazione di (2) si trova anche il valore del moltiplicatore di Lagrange λ. In particolare, abbiamo individuato i due punti

$$P_1 = (1,0) \qquad \text{e} \qquad P_2 = (-1,0),$$

come candidati a punti di massimo e/o di minimo.

Assumiamo adesso che valga

$$6\,x + 2\,\lambda = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad x = -\frac{\lambda}{3}.$$

Dalla terza equazione in (2), si ottiene

$$y^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{9}.$$

Sostituendo nella prima equazione di (2), si ottiene allora

$$3\,\frac{\lambda^2}{9} - 3\left(1 - \frac{\lambda^2}{9}\right) = -2\,\lambda\,\frac{\lambda}{3}$$

ovvero

$$\frac{4}{3}\lambda^2 = 3 \qquad \text{da cui} \qquad \lambda = \pm\frac{3}{2}.$$

Adesso che abbiamo trovato il valore del moltiplicatore di Lagrange, possiamo trovare x e y ricordando le relazioni

$$x = -\frac{\lambda}{3} \qquad \text{e} \qquad y^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{9}.$$

Troviamo allora le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} \lambda &= & 3/2 \\ x &= & -1/2 \\ y &= & \pm\sqrt{3}/2 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda &= & -3/2 \\ x &= & 1/2 \\ y &= & \pm\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

e quindi abbiamo gli ulteriori 4 punti

$$P_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Valutiamo adesso f su questi 6 punti per trovare massimo e minimo: si ha

$$\begin{aligned} &f(P_1) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(P_2) = -1, \\ &f(P_3) = f(P_4) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} = 1, \\ &f(P_5) = f(P_6) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} = -1. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\max_E f = 1 \qquad \text{e} \qquad \min_E f = -1,$$

e P_1, P_3, P_4 sono punti di massimo, mentre P_2, P_5, P_6 sono punti di minimo. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si calcoli il flusso dei campi vettoriali*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0) \qquad e \qquad \operatorname{rot}\mathbf{F},$$

attraverso $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ 0 \le z \le 1/2\}$.

Soluzione. Osserviamo che Σ è il sostegno della superficie

$$\phi(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta\,\sin\varphi, \sin\vartheta\,\sin\varphi, \cos\varphi), \qquad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Si ha

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = (-\sin\vartheta\,\sin\varphi, \cos\vartheta\,\sin\varphi, 0),$$

e

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = (\cos\vartheta\,\cos\varphi, \sin\vartheta\,\cos\varphi, -\sin\varphi),$$

da cui

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = (-\cos\vartheta\,\sin^2\varphi, -\sin^2\varphi\,\sin\vartheta, \cos\varphi\,\sin\varphi).$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle\, d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left\langle F(\phi(\vartheta,\varphi)), \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right\rangle dt\, ds \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\,\sin\varphi\cdot(-\cos\vartheta\,\sin^2\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,(\cos^2\varphi - 1)\, d\varphi\right) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2}\, d\vartheta\right)\left(\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3} + \cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \pi\left(-\frac{11}{24}\right) = -\frac{11\pi}{24}. \end{aligned}$$

Per calcolare il flusso del rotore, è sufficiente osservare che il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e dunque irrotazionale, i.e. $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Quindi il flusso è nullo. □