Nome, Cognome ....

Matricola ....

ANALISI MATEMATICA
– PROVA SCRITTA –

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2018/2019

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- *Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.*
- *La seconda parte verrà corretta* **esclusivamente** *nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.*
- *Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta corretta.*

Esercizio 1. *Si trovi il momento d'inerzia dell'insieme* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi/2], 0 \leq y \leq \cos x\}$ *rispetto all'asse delle* x

$$\mathcal{I} = \frac{2}{9}$$

Esercizio 2. *Si dica per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il punto* $(1/6, 1/12)$ *è punto di minimo locale per* $f(x, y) = x^3 + \alpha\, x\, y + y^2$

$$\alpha = -1$$

Esercizio 3. *Si trovi una primitiva* F *della funzione* $f(x) = x/\sqrt{1 - x^2}$

$$F(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

Esercizio 4. *Si trovi la lunghezza della curva* $\gamma(t) = (e^t + e^{-t}, 2\,t)$ *con* $t \in [-1, 1]$

$$\ell(\gamma) = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Esercizio 5. *Trovare una superficie regolare* ϕ *il cui sostegno coincida con l'insieme* $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\}$

$$\phi(t, s) = (2\,\cos t\,\sin s, 2\,\sin t\,\sin s, 2\,\cos s) \qquad (t, s) \in [0, 2\,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

Esercizio 6. *Sia* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, *si determinino*

$$\max_{(x,y)\in E}(x - 2\,y) = \sqrt{5} \qquad\qquad \min_{(x,y)\in E}(x - 2\,y) = -\sqrt{5}$$

Esercizio 7. *Si dica per quali* $\alpha \geq 0$ *la seguente serie numerica risulta convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n + 2^n}{3^n + 4^n} \qquad \alpha < 4$$

Esercizio 8. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x).$$

Sia γ *un circuito regolare a tratti, il cui sostegno coincida con il triangolo rettangolo avente vertici in* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$, *percorso in senso antiorario. Calcolare il lavoro* L *di* $\mathbf{F}$ *lungo* γ

$$L = 1$$

Esercizio 9. *Si calcoli il limite seguente*

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{x+\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{1 - x}\right)\frac{1}{x - \sin x} = -2$$

Esercizio 10. *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di* $f(x, y) = \arcsin(x - y)$ *nel punto* $(1, 1, 0)$

$$z = x - y$$

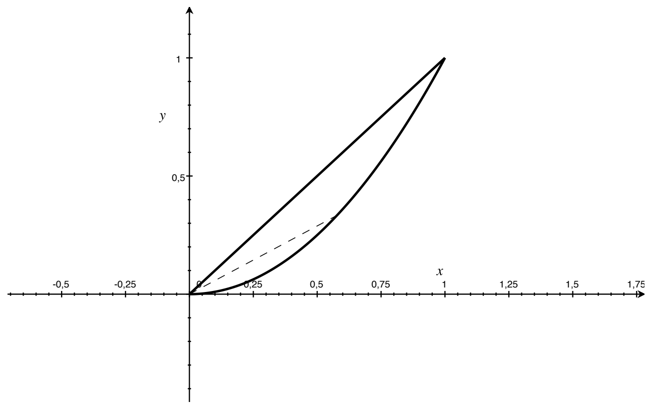

FIGURE 1. L'insieme Q dell'Esercizio 11. La linea tratteggiata corrisponde all'angolo $\vartheta = \pi/3$, l'intersezione con la parabola permette di determinare il raggio massimo $R(\vartheta)$.

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** *verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.*

Esercizio 11 (8 punti)**.** *Consideriamo l'insieme*

$$Q = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, 1],\, x^2 \le y \le x\Big\}.$$

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Soluzione. Conviene usare le coordinate polari

$$x = \varrho \cos\vartheta, \qquad y = \varrho \sin\vartheta.$$

L'insieme Q è compreso nella porzione di piano corrispondente a $0 \le \vartheta \le \pi/4$, dobbiamo trovare le limitazioni sulla variabile ϱ. Non è difficile convincersi che deve valere $0 \le \varrho \le R(\vartheta)$, dobbiamo trovare il raggio limite $R(\vartheta)$. Per fare ciò, basta osservare che $R(\vartheta)$ corrisponde alla distanza dall'origine del punto che si trova sul grafico di $y = x^2$. Quindi basta usare la relazione

$$y = x^2,$$

e sostituire le coordinate polari, ovvero

$$R(\vartheta)\, \sin\vartheta = R(\vartheta)^2\, \cos^2\vartheta,$$

da cui

$$R(\vartheta) = \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{R(\vartheta)} \varrho\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{R(\vartheta)^3}{3}\, d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3\vartheta}{\cos^6\vartheta}\, d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\vartheta(1 - \cos^2\vartheta)}{\cos^6\vartheta}\, d\vartheta \\ &= \left[\frac{1}{5\, \cos^5\vartheta} - \frac{1}{3\, \cos^3\vartheta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti)**.** *Si consideri il campo vettoriale*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, (x\, y)^2\, z\right), \qquad \textit{per } (x, y) \ne (0, 0).$$

Si calcoli il flusso di $\mathbf{F}$ *attraverso il bordo dell'insieme*

$$V = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \le z \le 1\} \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le 1/2\}.$$

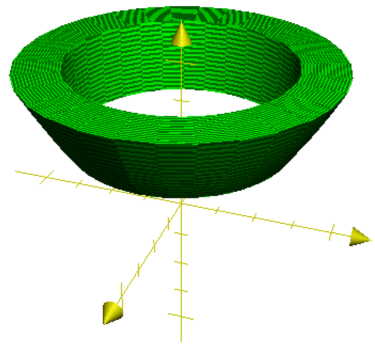

Figure 2. L'insieme V dell'Esercizio 12.

Soluzione. Usiamo il Teorema della Divergenza per calcolare il flusso, ovvero

$$\iint_{\partial V} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz.$$

Calcoliamo adesso la divergenza di $\mathbf{F}$, si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2\,x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2\,y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) + x^2\,y^2 = x^2\,y^2.$$

Dobbiamo quindi integrare

$$\iiint_V x^2\,y^2 \, dx \, dy \, dz.$$

Al fine di calcolare questo integrale, possiamo osservare che V è un insieme $z-$semplice, che si può scrivere così

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x,y) \in D, \, x^2+y^2 \le z \le 1\},$$

dove D è l'anello centrato nell'origine, avente raggi $1/\sqrt{2}$ e 1. Abbiamo allora

$$\iiint_V x^2\,y^2 \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^1 dz \right) x^2\,y^2 \, dx \, dy = \iint_D (1-x^2-y^2)\, x^2\,y^2 \, dx \, dy.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, usiamo le coordinate polari:

$$\begin{aligned} \iint_D (1-x^2-y^2)\, x^2\,y^2 \, dx \, dy &= \int_0^{2\,\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-\varrho^2)\, \varrho^5 \, (\cos\vartheta \, \sin\vartheta)^2 \, d\varrho \, d\vartheta \\ &= \left(\int_0^{2\,\pi} (\cos\vartheta \, \sin\vartheta)^2 \, d\vartheta \right) \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (\varrho^5 - \varrho^7) \, d\varrho \right). \end{aligned}$$

Il calcolo del secondo integrale è immediato, per il primo invece possiamo osservare che usando le formule di duplicazione e bisezione

$$(\cos\vartheta \, \sin\vartheta)^2 = \left(\frac{\sin(2\,\vartheta)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \, \frac{1-\cos(4\,\vartheta)}{2}.$$

Otteniamo quindi

$$\int_0^{2\,\pi} (\cos\vartheta \, \sin\vartheta)^2 \, d\vartheta = \int_0^{2\,\pi} \frac{1-\cos(4\,\vartheta)}{8} \, d\vartheta = \left[\frac{\vartheta}{8} - \frac{\sin(4\,\vartheta)}{32} \right]_0^{2\,\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Questo conclude l'esercizio. $\square$