

Nome, Cognome

Matricola

ANALISI MATEMATICA A&B

– **PROVA SCRITTA** –

19 FEBBRAIO 2024

CORSO DI LAUREA IN
INGEGNERIA MECCANICA – A.A. 2023/2024

Libri, appunti e calcolatrici non ammessi

PRIMA PARTE

- Lo studente scriva solo la risposta, direttamente su questo foglio.
- La seconda parte verrà corretta **esclusivamente** nel caso che lo studente risponda correttamente ad almeno 5 domande su 10 della prima parte.
- Ogni esercizio vale 2 punti, in caso di risposta completa e corretta

Esercizio 1. Si dica quali tra i seguenti campi vettoriali sono conservativi sul proprio insieme di definizione

$\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$	$\mathbf{G}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$	$\mathbf{H}(x, y, z) = (z, z, x)$	$\mathbf{I}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)$
-----------------------------	---	-----------------------------------	---

Esercizio 2. Siano $f(x, y) = x^2 - y^4$ e $\omega = (\sqrt{3}/2, -1/2)$, si calcoli la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(1, 1) = \sqrt{3} + 2$$

Esercizio 3. Trovare e classificare i punti critici della seguente funzione $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \text{ minimo locale, } (0, 0) \text{ punto sella}$$

Esercizio 4. Siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f(x, y) = x^2 + 2y + 1$, si calcolino

$$\max_E f = 3 \quad e \quad \min_E f = -1$$

Esercizio 5. Si calcoli il lavoro L del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ lungo il sostegno della curva $\gamma(t) = (t^2, \cos(\log(1 + t)))$ con $t \in [0, 1]$

$$L = \cos(\log 2)$$

Esercizio 6. Si calcoli l'integrale seguente

$$\int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$$

Esercizio 7. Si dica quali tra le seguenti serie numeriche risultano convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{prima, seconda, terza}$$

Esercizio 8. Si dica quale tra i seguenti numeri reali è il più grande

$$3 \quad \pi \quad 3,25 \quad \boxed{3,5} \quad \frac{3}{2}$$

Esercizio 9. Si dia l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = x + \sin(y)$ nel punto $(1, 0, f(1, 0))$

$$z = x + y$$

Esercizio 10. Si trovino i punti in cui si annulla la derivata della funzione $f(x) = x^4 - x^2$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad x = 0$$

SECONDA PARTE

Lo studente scriva lo svolgimento di ogni esercizio su un foglio a parte.

In questa parte **non** verranno ritenute valide risposte corrette, ma prive di giustificazione.

Esercizio 11 (9 punti). Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ il seguente grafico di funzione, dato da

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 + y^2 \right\}.$$

- Si calcoli il momento d'inerzia di Σ , rispetto all'asse z ;
- si calcoli il flusso del campo vettoriale costante $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ attraverso Σ .

Soluzione. Si osservi innanzitutto che questo esercizio è lo stesso degli appelli di Settembre 2023, 15 Gennaio 2024 e 5 Febbraio 2024. Copio e incollo qua sotto la soluzione, sperando che prima o poi gli studenti si decidano a studiare gli **integrali di superficie**.

L'insieme Σ è il **grafico di una funzione di 2 variabili**, quindi possiamo vederlo come il **sostegno di una superficie cartesiana**. Dobbiamo quindi calcolare due **integrali di superficie**, dati da

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma(x, y, z) \quad \text{e} \quad \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{N} \rangle d\sigma(x, y, z).$$

Per quanto visto a lezione (anche se nessuno studente si decide a studiare questa parte), si ha

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma(x, y, z) = \iint_A (x^2 + y^2) \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy,$$

dove

$$A = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \quad \text{e} \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Abbiamo quindi

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma(x, y, z) = \iint_A (x^2 + y^2) \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy = \iint_A (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

L'ultimo integrale si può calcolare usando le coordinate polari

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

quindi si ha

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho^3 (1 + 4\varrho^2)^{\frac{1}{2}} d\varrho d\vartheta = 2\pi \int_0^1 \varrho^3 (1 + 4\varrho^2)^{\frac{1}{2}} d\varrho.$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale, si può usare un'integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varrho^3 (1 + 4\varrho^2)^{\frac{1}{2}} d\varrho &= \left[\varrho^2 \frac{1}{12} (1 + 4\varrho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \varrho \frac{1}{6} (1 + 4\varrho^2)^{\frac{3}{2}} d\varrho \\ &= \left[\varrho^2 \frac{1}{12} (1 + 4\varrho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{120} (1 + 4\varrho^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{120} (25\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Il calcolo del secondo integrale si svolge in modo analogo, ricordando che per una superficie cartesiana si ha

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right),$$

da cui quindi

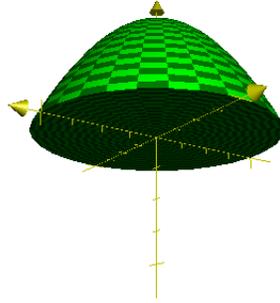
$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{N} \rangle d\sigma(x, y, z) = \iint_A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy = \iint_A dx dy = \pi.$$

Questo conclude l'esercizio. □

Esercizio 12 (7 punti). Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 3x^2 - 3y^2, y - 6yx, z)$. Se ne calcoli il flusso attraverso l'insieme

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 - x^2 - y^2 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0 \right\}$$

Si dica inoltre se il campo \mathbf{F} è conservativo, giustificando la risposta. In caso affermativo, se ne trovi un potenziale.

FIGURA 1. L'insieme E dell'Esercizio 12.

Soluzione. Si tratta dello stesso esercizio del 5 Febbraio 2024. Si osservi che l'insieme Σ può essere visto come la frontiera dell'insieme chiuso e limitato

$$E = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \right\},$$

si veda la Figura 1. Tale frontiera, è unione di due sostegni di superfici regolari. Inoltre, il campo vettoriale \mathbf{F} è C^1 su tutto \mathbb{R}^3 . Possiamo allora applicare il Teorema della Divergenza per ottenere che il flusso *uscende* da Σ è dato da

$$\Phi_{\mathbf{F}|\Sigma} = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle d\sigma(x, y, z) = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz.$$

Osserviamo adesso che

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 3x^2 - 3y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y - 6yx) + \frac{\partial}{\partial z}z = 3,$$

da cui quindi

$$\Phi_{\mathbf{F}|\Sigma} = 3 \iiint_E dx dy dz.$$

Chiamiamo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, utilizzando la formula dell'integrale iterato e vedendo E come insieme z -semplice, abbiamo allora

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{F}|\Sigma} &= 3 \iiint_E dx dy dz = 3 \iint_A \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dx dy \\ &= 3 \iint_A (1 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \varrho^2) \varrho d\vartheta d\varrho \\ &= 6\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{6\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda domanda, osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -6y = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \end{aligned}$$

quindi il campo è irrotazionale su \mathbb{R}^3 . Dal momento che quest'ultimo insieme è stellato, si ottiene che \mathbf{F} è conservativo.

Infine, troviamo un potenziale U per \mathbf{F} : per definizione, si deve avere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = y - 6yx, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = z.$$

Dalla prima equazione, otteniamo che U deve avere la forma seguente

$$U(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + x^3 - 3y^2x + g(y, z),$$

con g funzione incognita dipendente soltanto da y e z . Usando questa espressione nella seconda condizione per U , si ha

$$y - 6yx = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} + x^3 - 3y^2x + g(y, z) \right) = -6yx + \frac{\partial g}{\partial y}$$

ovvero

$$\frac{\partial g}{\partial z} = y.$$

Abbiamo dunque che g deve avere la forma seguente

$$g(y, z) = \frac{y^2}{2} + h(z),$$

con h funzione incognita dipendente soltanto da z . Inseriamo questa informazione nell'espressione di U ricavata in precedenza, così da avere

$$U(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + x^3 - 3y^2x + \frac{y^2}{2} + h(z).$$

Infine, inseriamo questa informazione nella terza equazione per U : si ottiene

$$z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^2}{2} + x^3 - 3y^2x + \frac{y^2}{2} + h(z) \right) = h'(z).$$

Possiamo dunque prendere $h(z) = z^2/2$ e concluderne che

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + x^3 - 3y^2x,$$

è un potenziale per \mathbf{F} . □